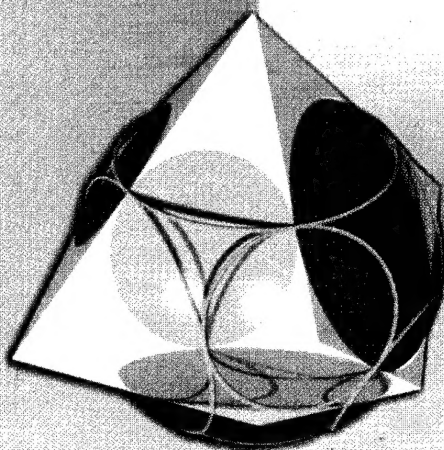
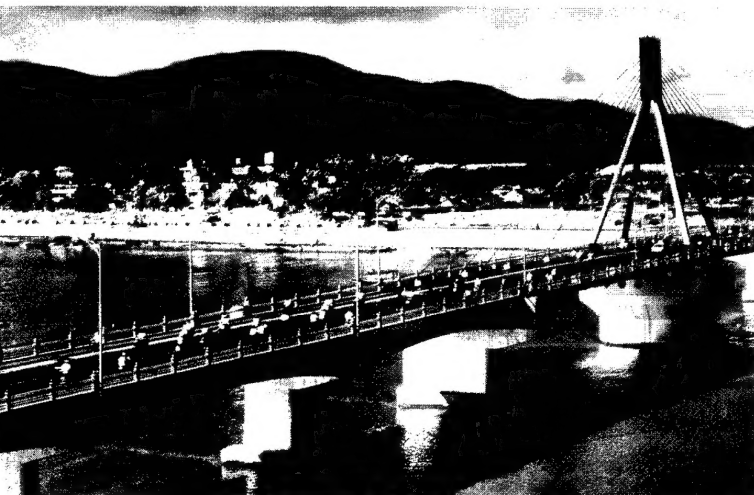


NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)  
KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYỀN

# BÀI TẬP HÌNH HỌC

# 12



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)  
KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYỀN

# BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

# LỜI NÓI ĐẦU

---

Nhằm phục vụ cho việc giảng dạy và học tập môn Hình học 12 theo chương trình Giáo dục Trung học phổ thông của Bộ Giáo dục và Đào tạo vừa mới ban hành và đồng thời chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học, nhóm tác giả SGK chúng tôi biên soạn cuốn “BÀI TẬP HÌNH HỌC 12” theo chương trình Chuẩn. Sách được viết theo nội dung của từng chương trong SGK với hệ thống các bài tập đa dạng, phong phú. Nội dung sách gồm ba chương sau đây :

**Chương I : Khối đa diện**

**Chương II : Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu**

**Chương III : Phương pháp tọa độ trong không gian.**

Trong mỗi chương, nội dung các bài tập được sắp xếp theo từng xoắn (§) với cấu trúc như sau :

**A. Các kiến thức cần nhớ :** Phần này nêu tóm tắt những kiến thức cơ bản mà mỗi học sinh cần phải nắm được trước khi làm toán, tạo điều kiện thuận lợi cho học sinh tra cứu, củng cố, hệ thống lại những nội dung đã học trong SGK.

**B. Các dạng toán cơ bản :** Phần này nêu các dạng toán cơ bản và thường gặp, giúp cho học sinh tập làm quen với việc sắp xếp hệ thống lại các bài toán đã làm, nắm được các phương pháp chủ yếu, quan trọng thường được dùng để giải các bài toán thuộc dạng đã nêu. Sau khi nêu phương pháp giải của mỗi dạng toán, sách bài tập có nêu một số ví dụ minh họa, nhằm củng cố và rèn luyện kĩ năng giải toán, củng cố các khái niệm, tập vận dụng các định lí, tập lập luận một cách rõ ràng và chính xác. Thông qua các ví dụ này, học sinh sẽ tự rút ra những kinh nghiệm bổ ích trong việc làm toán, rèn

luyện được phương pháp tự học, tránh được những nhầm lẫn không đáng có, tạo được niềm tin và dễ dàng tiếp cận với các bài toán mới tương tự.

**C. Câu hỏi và bài tập :** Gồm đề bài tập theo từng chương và có hướng dẫn, đáp số và lời giải. Học sinh có thể thử sức của mình khi tự giải các đề bài tập đó và nếu không giải được, hoặc muốn đánh giá lại kết quả đã làm, thì có thể xem thêm phần lời giải hoặc đáp án.

Cuối mỗi chương có các bài tập ôn tập của chương đó, kèm theo hướng dẫn giải và đáp số, đồng thời có một số câu hỏi trắc nghiệm cùng với đáp án, nhằm giúp cho học sinh tập làm quen với dạng bài tập này.

Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến góp ý của đông đảo bạn đọc để nội dung cuốn sách “BÀI TẬP HÌNH HỌC 12” được hoàn thiện hơn trong những lần tái bản sắp tới.

**CÁC TÁC GIẢ**

# CHƯƠNG I

## KHỐI ĐA DIỆN

---

### §1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### I- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN

*Hình đa diện* (gọi tắt là *đa diện*) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thoả mãn hai tính chất :

- a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.
- b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như thế gọi là một *mặt* của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các *đỉnh*, *cạnh* của hình đa diện.

##### II- KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong*, tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

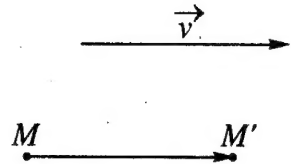
### III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

#### 1. Phép dời hình trong không gian

Phép biến hình trong không gian được gọi là *phép dời hình* nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

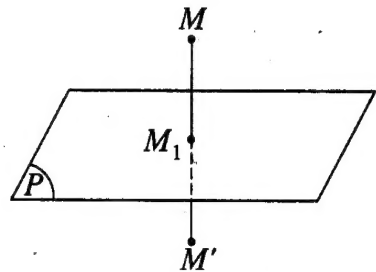
#### 2. Một số phép dời hình thường gặp

a) **Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$**  là phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$  (h.1.1).



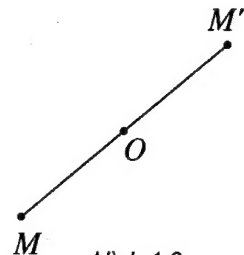
Hình 1.1

b) **Phép đối xứng qua mặt phẳng  $(P)$**  là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc  $(P)$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  không thuộc  $(P)$  thành điểm  $M'$  sao cho  $(P)$  là mặt phẳng trung trực của  $MM'$  (h.1.2).



Hình 1.2

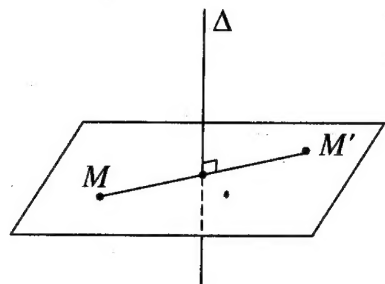
c) **Phép đối xứng tâm  $O$**  là phép biến hình biến điểm  $O$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $O$  thành điểm  $M'$  sao cho  $O$  là trung điểm của  $MM'$  (h.1.3).



Hình 1.3

Nếu phép đối xứng tâm  $O$  biến hình  $(H)$  thành chính nó thì  $O$  được gọi là *tâm đối xứng* của  $(H)$ .

d) **Phép đối xứng qua đường thẳng  $\Delta$**  (hay phép đối xứng qua trục  $\Delta$ ) là phép biến hình biến mọi điểm thuộc  $\Delta$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  không thuộc  $\Delta$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\Delta$  là đường trung trực của  $MM'$  (h.1.4). Nếu phép đối xứng qua đường thẳng  $\Delta$  biến hình  $(H)$  thành chính nó thì  $\Delta$  được gọi là *trục đối xứng* của  $(H)$ .



Hình 1.4

### 3. Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện ( $H$ ) thành đa diện ( $H'$ ) và biến đỉnh, cạnh, mặt của ( $H$ ) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của ( $H'$ ).

Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

## IV- PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện ( $H$ ) là hợp của hai khối đa diện ( $H_1$ ), ( $H_2$ ) sao cho ( $H_1$ ) và ( $H_2$ ) không có chung điểm trong thì ta nói có thể chia được khối đa diện ( $H$ ) thành hai khối đa diện ( $H_1$ ) và ( $H_2$ ), hay có thể lắp ghép được hai khối đa diện ( $H_1$ ) và ( $H_2$ ) với nhau để được khối đa diện ( $H$ ).

## B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Chứng minh một số tính chất liên quan đến các đỉnh, các cạnh, các mặt của một khối đa diện

#### 1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất a) và b) trong định nghĩa hình đa diện.

#### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng một khối đa diện bất kì có ít nhất bốn mặt.

#### *Giải*

Gọi  $M_1$  là một mặt của khối đa diện ( $H$ ). Vì  $M_1$  là một đa giác nên nó có ít nhất ba cạnh  $c_1, c_2, c_3$ . Từ đó có một mặt  $M_2$  có chung cạnh  $c_1$  với  $M_1$  và  $M_2 \neq M_1$ . Gọi  $M_3$  là mặt có chung cạnh  $c_2$  với  $M_1$  và  $M_3 \neq M_1$ . Vì  $c_1$  thuộc  $M_2$  và không thuộc  $M_3$  nên  $M_3$  khác  $M_2$ . Gọi  $M_4 \neq M_1$  là mặt có chung cạnh  $c_3$  với  $M_1$ . Lí luận tương tự như trên ta thấy  $M_4$  không chứa  $c_1$  và  $c_2$  nên nó khác với hai mặt phẳng  $M_2, M_3$ . Vậy khối đa diện ( $H$ ) có ít nhất bốn mặt.

**Ví dụ 2.** Cho  $(H)$  là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có  $p$  cạnh. Chứng minh rằng nếu số mặt của  $(H)$  là lẻ thì  $p$  phải là số chẵn.

### ***Giải***

Gọi  $m$  là số các mặt của một khối đa diện  $(H)$ . Vì mỗi mặt của  $(H)$  có  $p$  cạnh nên  $m$  mặt có  $pm$  cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số các cạnh của  $(H)$  bằng  $c = \frac{pm}{2}$ . Vì  $m$  lẻ nên  $p$  phải là số chẵn.



## **VẤN ĐỀ 2**

Chứng minh hai đa diện bằng nhau

### ***1. Phương pháp giải***

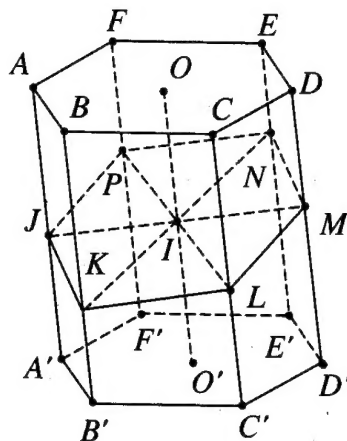
Chỉ ra một phép dời hình cụ thể đã được xác định biến đa diện này thành đa diện kia.

### ***2. Ví dụ***

Cho lăng trụ  $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$  có đáy là những lục giác đều. Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của đáy. Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $I$  và cắt tất cả cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh rằng  $(\alpha)$  chia lăng trụ thành hai đa diện bằng nhau.

### ***Giải***

Giả sử mp  $(\alpha)$  cắt  $AA', BB', CC', DD', EE', FF'$  lần lượt tại  $J, K, L, M, N, P$  (h.1.5). Dễ thấy  $I$  cũng là trung điểm của  $JM, KN$  và  $LP$ . Phép đối xứng tâm  $I$  biến các điểm  $A, B, C, D, E, F, J, K, L, M, N, P$  lần lượt thành các điểm  $D', E', F', A', B', C', M, N, P, J, K, L$ . Do đó hai đa diện  $ABCDEF.JKLMNP$  và  $D'E'F'A'B'C'.MNPJKL$  bằng nhau vì có phép dời hình là phép đối xứng tâm  $I$  biến đa diện này thành đa diện kia.



Hình 1.5





Phân chia hoặc lắp ghép các khối đa diện

### 1. Phương pháp giải

Chọn mặt phẳng thích hợp để phân chia khối đa diện. Trong nhiều trường hợp, để chứng minh rằng có thể lắp ghép các khối đa diện  $(H_1), (H_2), \dots, (H_n)$  thành khối đa diện  $(H)$  ta chứng minh rằng có thể chia được khối đa diện  $(H)$  thành các khối đa diện  $(H_1), (H_2), \dots, (H_n)$ .

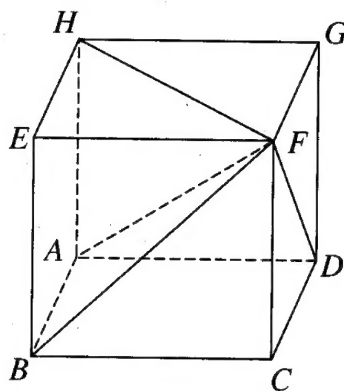
### 2. Ví dụ

Cho hình chóp tứ giác  $F.ABCD$  có đáy là hình vuông. Cạnh bên  $FC$  vuông góc với đáy và có độ dài bằng  $AB$ . Chứng minh rằng có thể dùng ba hình chóp bằng hình chóp trên để ghép lại thành một hình lập phương.

**Giải**

Từ hình chóp trên ta dựng hình lập phương  $HEFG.ABCD$  (h.1.6). Ta thấy hai hình chóp  $F.ABCD$  và  $F.ABEH$  đối xứng với nhau qua mặt phẳng  $(ABF)$ , hai hình chóp  $F.ABCD$  và  $F.AHGD$  đối xứng với nhau qua mặt phẳng  $(ADF)$ . Do đó ba hình chóp  $F.ABCD$ ,  $F.ABEH$  và  $F.AHGD$  bằng nhau.

Như vậy có thể chia được hình lập phương  $HEFG.ABCD$  thành ba hình chóp bằng hình chóp  $F.ABCD$ . Từ đó suy ra có thể ghép ba hình chóp bằng hình chóp  $F.ABCD$  để thành một hình lập phương.



Hình 1.6

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

- 1.1. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng hai tứ diện  $A'ABD$  và  $CC'D'B'$  bằng nhau.
- 1.2. Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $E, F, G$  lần lượt là trung điểm của  $AA', BB', CC'$ . Chứng minh rằng các lăng trụ  $ABC.EFG$  và  $EFG.A'B'C'$  bằng nhau.

- 1.3. Chia hình chóp tứ giác đều thành tám hình chóp bằng nhau.
- 1.4. Chia một khối tứ diện đều thành bốn khối tứ diện bằng nhau.
- 1.5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên  $k \geq 3$  luôn tồn tại một hình đa diện có  $2k$  cạnh.
- 1.6. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên  $k \geq 4$  luôn tồn tại một hình đa diện có  $2k + 1$  cạnh.
- 1.7. Chứng minh rằng không tồn tại một hình đa diện có
  - a) Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh ;
  - b) Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.
- 1.8. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

## §2. KHỐI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I- KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Khối đa diện ( $H$ ) được gọi là *khối đa diện lỗi* nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của ( $H$ ) luôn thuộc ( $H$ ). Khi đó các đa diện xác định ( $H$ ) được gọi là *các đa diện lỗi*.

Người ta chứng minh được rằng một khối đa diện là lỗi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.

#### II- KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

##### 1. Định nghĩa

Một khối đa diện lỗi được gọi là *khối đa diện đều loại  $\{p ; q\}$*  nếu :

- a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều  $p$  cạnh ;
- b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng  $q$  mặt.

Từ định nghĩa trên ta thấy các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau.

## 2. Định lí

Có năm loại khối đa diện đều. Đó là các khối đa diện đều loại  $\{3; 3\}$ , loại  $\{4; 3\}$ , loại  $\{3; 4\}$ , loại  $\{5; 3\}$ , và loại  $\{3; 5\}$ .

Tuỳ theo số mặt của chúng, năm loại khối đa diện đều kể trên theo thứ tự được gọi là các khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều (hay khối tám mặt đều), khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

## B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Chứng minh một số tính chất của khối đa diện đều

#### 1. Phương pháp giải

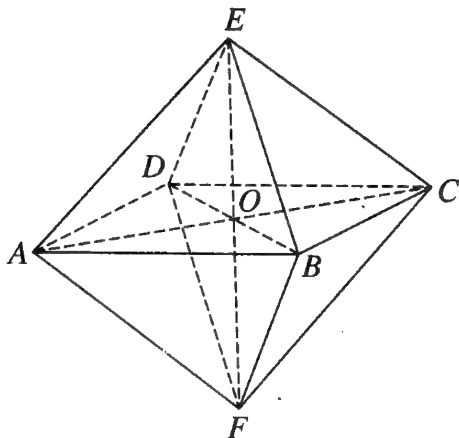
Sử dụng định nghĩa khối đa diện đều.

#### 2. Ví dụ

Cho khối bát diện đều  $ABCDEF$  (h.1.7). Chứng minh rằng :

a) Các điểm  $A, B, C, D$  cùng thuộc một mặt phẳng ; các điểm  $E, C, F, A$  cùng thuộc một mặt phẳng và các điểm  $E, D, F, B$  cùng thuộc một mặt phẳng ;

b) Chứng minh rằng ba mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $(ECFA)$  và  $(EDFB)$  đôi một vuông góc với nhau.



Hình 1.7

#### Giải

a) Vì  $AE = AF = BE = BF = CE = CF = DE = DF$  nên  $A, B, C, D$  thuộc mặt phẳng trung trực của  $EF$ . Tương tự các điểm  $E, C, F, A$  thuộc mặt phẳng trung trực của  $BD$  ;  $E, D, F, B$  thuộc mặt phẳng trung trực của  $AC$ .

b) Mặt phẳng  $(ECFA)$  chứa  $EF$  và  $EF \perp (ABCD)$  (vì  $(ABCD)$  là mặt phẳng trung trực của  $EF$  nên  $EF \perp (ABCD)$ ). Do đó  $(ECFA) \perp (ABCD)$ . Tương tự, ta chứng minh được  $(ABCD) \perp (EDFB)$  và  $(EDFB) \perp (ECFA)$ .



## VẤN ĐỀ 2

Xác định một khối đa diện đều

### 1. Phương pháp giải

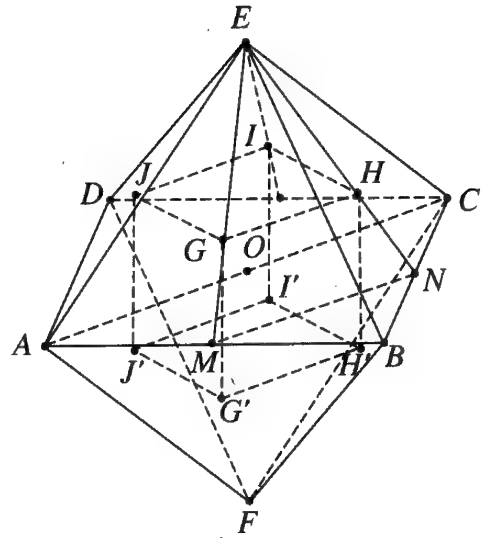
Sử dụng định nghĩa khối đa diện đều.

### 2. Ví dụ

Chứng minh rằng tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

#### ***Giải***

Ta có khối bát diện đều  $ABCDEF$  (h.1.8) cạnh bằng  $a$ . Vì  $A, B, C, D$  cách đều  $EF$  nên các điểm đó thuộc mặt phẳng  $(P)$  là mặt phẳng trung trực của  $EF$ . Giả sử  $EF$  cắt  $(P)$  tại  $O$ . Khi đó hình thoi  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  trong mặt phẳng  $(P)$  nên  $ABCD$  là hình vuông. Tương tự ta chứng minh được  $ECFA, EBFD$  là các hình vuông. Từ đó suy ra ba đường thẳng  $EF, AC$  và  $BD$  đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $O$ .



Hình 1.8

Gọi  $G, H, I, J, G', H', I', J'$  lần lượt là tâm của các mặt  $EAB, EBC, ECD, EDA, FAB, FBC, FCD, FDA$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ . Khi đó vì  $GH \parallel MN$  và  $MN \parallel AC$  nên  $GH \parallel AC$ . Ta còn có

$$GH = \frac{2}{3} MN, MN = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Do đó  $GH = \frac{\sqrt{2}}{3} a$ . Tương tự, ta chứng minh được các đoạn thẳng  $G'H', IJ,$

$I'J'$  song song với  $AC$  và bằng  $\frac{\sqrt{2}}{3} a$ , các đoạn thẳng  $IH, JG, J'G', I'H'$  song

song với  $BD$  và bằng  $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ , các đoạn thẳng  $GG', HH', II', JJ'$  song song với  $EF$  và bằng  $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ .

Vì ba đường thẳng  $EF, AC$  và  $BD$  đôi một vuông góc với nhau nên các đoạn thẳng  $GG', GH, GJ$  đôi một vuông góc với nhau. Từ đó suy ra  $GHH'G', HII'H', IJJ'I', JGG'J', GHIJ, G'H'I'J'$  là các hình vuông có cạnh bằng nhau. Do đó  $GHIJ.G'H'I'J'$  là hình lập phương.

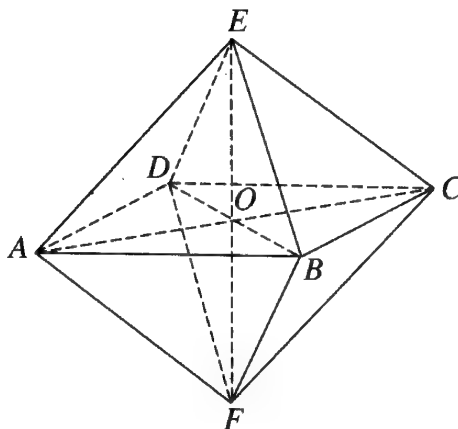
### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.9. Tính số cạnh của hình mười hai mặt đều (loại  $\{5;3\}$ ).

1.10. Tính số cạnh của hình hai mươi mặt đều (loại  $\{3;5\}$ ).

1.11. Cho một khối bát diện đều. Hãy chỉ ra một mặt phẳng đối xứng, một tâm đối xứng và một trục đối xứng của nó.

1.12. Cho khối bát diện đều  $ABCDEF$  (h.1.9). Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $M$  và  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB$  và  $AE$ . Tính diện tích thiết diện tạo bởi khối bát diện đó với mặt phẳng  $(OMN)$ .




Hình 1.9

1.13. Cho khối bát diện đều  $ABCDEF$  cạnh bằng  $a$ , trong đó  $E, F$  là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh (h.1.9). Gọi  $A', B', C', D', A'', B'', C'', D''$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD$ . Chứng minh rằng  $A'B'C'D'.A''B''C''D''$  là một hình hộp chữ nhật và tính ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó theo  $a$ .

## §3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Thể tích  $V$  của khối chóp có diện tích đáy  $B$  và chiều cao  $h$  là  $V = \frac{1}{3}Bh$ .
- Thể tích  $V$  của khối lăng trụ có diện tích đáy  $B$  và chiều cao  $h$  là  $V = Bh$ .
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích đáy và chiều cao của nó.
- Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.

 **Chú ý.** i) Tỷ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỷ số đồng dạng.

ii) Trong một số bài toán ta thường sử dụng kết quả sau :

Cho khối chóp  $S.ABC$ . Trên các đoạn thẳng  $SA, SB, SC$  lần lượt lấy ba điểm  $A', B', C'$  khác với  $S$ . Khi đó  $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ .

### B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



#### VẤN ĐỀ 1

Tính thể tích của một khối đa diện

#### 1. Phương pháp giải

- a) Chia khối đa diện đã cho thành các khối lăng trụ hoặc các khối chóp đơn giản hơn.
- b) Ghép thêm vào khối đa diện đã cho các khối đa diện quen biết để được một khối đa diện đơn giản hơn.
- c) Tìm tỷ số thể tích giữa khối đa diện đã cho với một khối đa diện đã biết thể tích.

#### 2. Ví dụ

Cho khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a, BC = b, AA' = c$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $B'C'$  và  $C'D'$ . Mặt phẳng  $(AEF)$  chia khối hộp đó thành hai khối đa diện  $(H)$  và  $(H')$ , trong đó  $(H)$  là khối đa diện chứa đỉnh  $A'$ . Tìm thể tích của  $(H)$  và  $(H')$ .

### ***Giải***

Giả sử đường thẳng  $EF$  cắt đường thẳng  $A'B'$  tại  $I$  và cắt đường thẳng  $A'D'$  tại  $J$ :  $AI$  cắt  $BB'$  tại  $L$ ,  $AJ$  cắt  $DD'$  tại  $M$  (h.1.10).

Gọi  $(K)$  là tứ diện  $AA'IJ$ .

Khi đó  $V_{(H)} = V_{(K)} - V_{L.B'IE} - V_{M.D'JF}$ .

Vì  $EB' = EC'$  và  $B'I \parallel C'F$

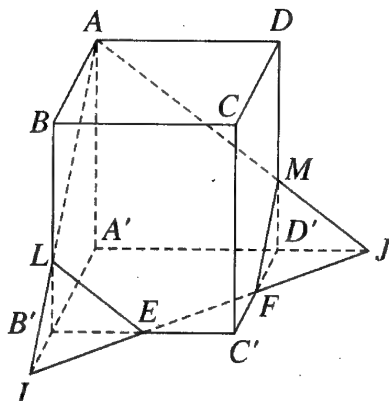
nên  $B'I = C'F = \frac{A'B'}{2}$ . Tương tự,  $D'J = \frac{A'D'}{2}$ .

Từ đó theo định lí Ta-lét ta có  $\frac{LB'}{AA'} = \frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{MD'}{AA'} = \frac{JD'}{JA'} = \frac{1}{3}$ .

Do đó  $V_{L.B'EI} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{c}{3} = \frac{abc}{72}$ . Tương tự,  $V_{M.D'FJ} = \frac{abc}{72}$ .

Vì  $V_{(K)} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3b}{2} \right) \cdot c = \frac{3abc}{8}$ , nên  $V_{(H)} = \frac{3abc}{8} - \frac{2abc}{72} = \frac{25abc}{72}$

và  $V_{(H')} = \frac{47abc}{72}$ .



Hình 1.10



## **VẤN ĐỀ 2**

Dùng cách tính thể tích để giải một số bài toán hình học

### **1. Phương pháp giải**

- Tính các đại lượng hình học của khối đa diện theo thể tích của khối đa diện ấy.
- Dùng hai cách để tính thể tích của cùng một khối đa diện rồi so sánh chúng với nhau để rút ra đại lượng hình học cần tìm.

### **2. Ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông ở  $B$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với đáy. Biết rằng  $AB = a$ ,  $SA = b$ .

Hãy tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ .

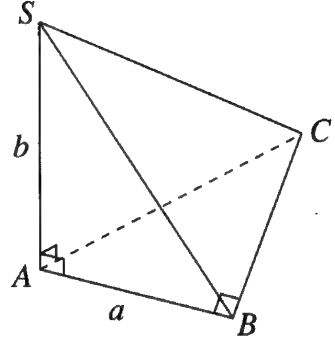
### Giải

Theo định lí ba đường vuông góc,  $BC$  vuông góc với hình chiếu  $AB$  của đường xiên  $SB$  nên  $BC$  vuông góc với  $SB$ .

Gọi  $h$  là khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ ,  $V$  là thể tích hình chóp  $S.ABC$  thì

$$V = \frac{1}{6} SA.AB.BC = \frac{1}{6} h.SB.BC.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } h &= \frac{SA.AB.BC}{SB.BC} = \frac{SA.AB}{SB} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{h.1.11}). \end{aligned}$$



Hình 1.11

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện  $ABCD$  và  $M$  là một điểm trong của tứ diện đó. Gọi  $h_A, h_B, h_C, h_D$  lần lượt là khoảng cách từ  $A, B, C, D$  đến các mặt đối diện và  $m_A, m_B, m_C, m_D$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các mặt  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ . Chứng minh rằng  $\frac{m_A}{h_A} + \frac{m_B}{h_B} + \frac{m_C}{h_C} + \frac{m_D}{h_D} = 1$ .

### Giải

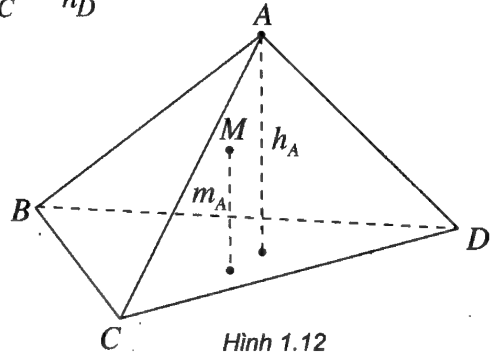
Gọi thể tích các khối tứ diện  $ABCD, MBCD, MCDA, MDAB, MABC$  theo thứ tự là  $V, V_A, V_B, V_C, V_D$  (h.1.12), ta có :

$$\frac{V_A}{V} = \frac{m_A}{h_A} \Rightarrow V_A = \frac{m_A}{h_A} V.$$

$$\text{Tương tự, } V_B = \frac{m_B}{h_B} V, V_C = \frac{m_C}{h_C} V, V_D = \frac{m_D}{h_D} V.$$

$$\text{Do đó } V = V_A + V_B + V_C + V_D = \left( \frac{m_A}{h_A} + \frac{m_B}{h_B} + \frac{m_C}{h_C} + \frac{m_D}{h_D} \right) V.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{m_A}{h_A} + \frac{m_B}{h_B} + \frac{m_C}{h_C} + \frac{m_D}{h_D} = 1.$$



Hình 1.12





Tìm tỉ số thể tích của hai khối đa diện

### 1. Phương pháp giải

a) Tính thể tích của từng khối đa diện.

b) Sử dụng chú ý ii) với công thức  $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ .

### 2. Ví dụ

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  và vuông góc với  $SC$  cắt  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $B', C', D'$ . Biết rằng  $AB = a$ ,  $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$ .

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp  $S.AB'C'D'$  và  $S.ABCD$ .

b) Tính thể tích của khối chóp  $S.AB'C'D'$ .

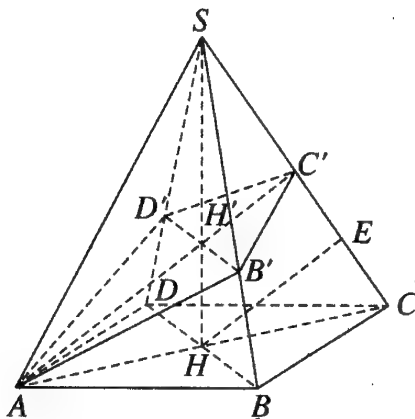
### Giải

a) Gọi  $SH$  là đường cao của hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ ,  $SH$  cắt  $(P)$  tại  $H'$  (h.1.13). Khi đó  $H$  là giao của  $AC$  và  $BD$ . Vì  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp SC$ . Do đó  $BD \parallel (P)$ . Từ đó suy ra  $(P)$  cắt  $(SDB)$  theo giao tuyến  $B'D'$  song song với  $BD$ . Do đó  $\frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SH} = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$ ,  $H'B' = H'D'$  và  $D'B' \perp AC'$ . Giả sử đường thẳng qua  $H$  song song với  $AC'$  cắt  $SC$  tại  $E$ . Khi đó  $EC' = EC$ ,  $\frac{SC'}{SE} = \frac{2}{3}$ .

Từ đó suy ra  $\frac{SE - SC'}{SE} = \frac{1}{3} = \frac{EC'}{SE}$ .

Do đó  $SC' = 2EC' = C'C$ .

Ta có:  $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ,  $\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$ .



Hình 1.13

Từ đó suy ra  $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$ .

Vậy  $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}$ .

b) Theo chứng minh trên ta có  $AC'$  vừa là đường cao vừa là trung tuyến của  $\triangle SAC$  nên  $AS = AC$ . Do đó  $\triangle SAC$  đều. Từ đó suy ra

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} a.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{6}}{2} a^3 = \frac{\sqrt{6}}{6} a^3.$$

Từ đó suy ra  $V_{S.AB'C'D'} = \frac{\sqrt{6}}{18} a^3$ .

### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

- 1.14. Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $a$ , các cạnh bên tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Hãy tính thể tích của khối chóp đó.
- 1.15. Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác cân,  $AB = AC = 5a$ ,  $BC = 6a$  và các mặt bên tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Hãy tính thể tích của khối chóp đó.
- 1.16. Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông ở  $B$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với đáy. Từ  $A$  kẻ các đoạn thẳng  $AD$  vuông góc với  $SB$  và  $AE$  vuông góc với  $SC$ . Biết rằng  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $SA = c$ .
  - a) Hãy tính thể tích khối chóp  $S.ADE$ .
  - b) Tính khoảng cách từ  $E$  đến mặt phẳng  $(SAB)$ .
- 1.17. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm trong bất kì của một tứ diện đều đến các mặt của nó là một số không đổi.
- 1.18. Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $AA' = a$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $AD$  sao cho  $AM = 3MD$ .
  - a) Tính thể tích khối chóp  $M.AB'C$ .
  - b) Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(AB'C)$ .

1.19. Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AA' = c$ . Gọi  $M$  và  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $A'B'$  và  $B'C'$ .

Tính tỉ số giữa thể tích khối chóp  $D'.DMN$  và thể tích khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ .

1.20. Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AA' = c$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là những điểm thuộc các cạnh  $BB'$  và  $DD'$  sao cho  $BE = \frac{1}{2}EB'$ ,

$DF = \frac{1}{2}FD'$ . Mặt phẳng  $(AEF)$  chia khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$

thành hai khối đa diện  $(H)$  và  $(H')$ . Gọi  $(H')$  là khối đa diện chứa đỉnh  $A'$ . Hãy tính thể tích của  $(H)$  và tỉ số thể tích của  $(H)$  và  $(H')$ .

1.21. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $B'C'$  và  $C'D'$ . Mặt phẳng  $(AEF)$  chia hình hộp đó thành hai hình đa diện  $(H)$  và  $(H')$ , trong đó  $(H)$  là hình đa diện chứa đỉnh  $A'$ . Tính tỉ số giữa thể tích hình đa diện  $(H)$  và thể tích hình đa diện  $(H')$ .

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.22. Hình được tạo thành từ hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  khi ta bỏ đi các điểm trong của mặt  $(ABCD)$  có phải là một hình đa diện không?

1.23. Chứng minh rằng mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

1.24. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

1.25. Chứng minh rằng không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

1.26. Cho hai đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$  chéo nhau,  $AC$  là đường vuông góc chung của chúng. Biết rằng  $AC = h$ ,  $AB = a$ ,  $CD = b$  và góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng  $60^\circ$ . Hãy tính thể tích của tứ diện  $ABCD$ .

1.27. Tính thể tích khối lăng trụ có chiều cao bằng  $h$ , đáy là ngũ giác đều nội tiếp trong một đường tròn bán kính  $r$ .

1.28. Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $(H)$  là hình bát diện đều có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện đều đó. Tính tỉ số  $\frac{V_{(H)}}{V_{ABCD}}$ .

- 1.29.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  và  $E$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC$ ,  $CC'$  và  $C'A'$ . Đường thẳng  $EN$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $F$ , đường thẳng  $MN$  cắt đường thẳng  $B'C'$  tại  $L$ . Đường thẳng  $FM$  kéo dài cắt  $AB$  tại  $I$ , đường thẳng  $LE$  kéo dài cắt  $A'B'$  tại  $J$ .
- Chứng minh rằng các hình đa diện  $IBMJB'L$  và  $A'EJAFI$  là những hình chóp cụt.
  - Tính thể tích hình chóp  $F.AIJA'$ .
  - Chứng minh rằng mặt phẳng  $(MNE)$  chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- 1.30.** Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng :
- "Số cạnh của một hình đa diện luôn ..... số mặt của hình đa diện ấy."
- (A) bằng ; (C) nhỏ hơn ;  
(B) nhỏ hơn hoặc bằng ; (D) lớn hơn.
- 1.31.** Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng :
- "Số cạnh của một hình đa diện luôn ..... số đỉnh của hình đa diện ấy."
- (A) bằng ; (C) nhỏ hơn ;  
(B) lớn hơn ; (D) nhỏ hơn hoặc bằng.
- 1.32.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai* ?
- (A) Hình lập phương là đa diện lồi.  
(B) Tứ diện là đa diện lồi.  
(C) Hình hộp là đa diện lồi.  
(D) Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép với nhau là một hình đa diện lồi.
- 1.33.** Cho một hình đa diện. Tìm khẳng định *sai* trong các khẳng định sau :
- (A) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh ;  
(B) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt ;  
(C) Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt ;  
(D) Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.
- 1.34.** Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu tứ diện bằng nhau ?
- (A) Hai ; (B) Vô số ; (C) Bốn ; (D) Sáu.

**1.35.** Số cạnh của một hình bát diện đều là :

- (A) tám ; (C) mười hai ;  
(B) mười ; (D) mười sáu.

**1.36.** Số đỉnh của một hình bát diện đều là :

- (A) sáu ; (C) mười ;  
(B) tám ; (D) mười hai.

**1.37.** Số đỉnh của hình mười hai mặt đều là :

- (A) mười hai ; (C) hai mươi ;  
(B) mười sáu ; (D) ba mươi.

**1.38.** Số cạnh của hình mười hai mặt đều là :

- (A) mười hai ; (C) hai mươi ;  
(B) mười sáu ; (D) ba mươi.

**1.39.** Số đỉnh của hình hai mươi mặt đều là :

- (A) mười hai ; (C) hai mươi ;  
(B) mười sáu ; (D) ba mươi.

**1.40.** Cho  $(H)$  là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ .

Thể tích của  $(H)$  bằng :

- (A)  $\frac{a^3}{2}$  ; (B)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$  ; (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$  ; (D)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .

**1.41.** Cho  $(H)$  là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ .

Thể tích của  $(H)$  bằng :

- (A)  $\frac{a^3}{3}$  ; (B)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$  ; (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$  ; (D)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .

**1.42.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $B'$  và  $C'$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện  $AB'C'D$  và khối tứ diện  $ABCD$  bằng :

- (A)  $\frac{1}{2}$  ; (B)  $\frac{1}{4}$  ; (C)  $\frac{1}{6}$  ; (D)  $\frac{1}{8}$ .

**1.43.** Cho hình lăng trụ ngũ giác  $ABCDE.A'B'C'D'E'$ . Gọi  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ ,  $E''$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ . Tỉ số thể tích giữa khối lăng trụ  $ABCDE.A''B''C''D''E''$  và khối lăng trụ  $ABCDE.A'B'C'D'E'$  bằng :

- (A)  $\frac{1}{2}$  ; (B)  $\frac{1}{4}$  ; (C)  $\frac{1}{8}$  ; (D)  $\frac{1}{10}$ .

- 1.44. Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có thể tích bằng  $V$ . Lấy điểm  $A'$  trên cạnh  $SA$  sao cho  $SA' = \frac{1}{3}SA$ . Mặt phẳng qua  $A'$  và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $B', C', D'$ . Khi đó thể tích hình chóp  $S.A'B'C'D'$  bằng :
- (A)  $\frac{V}{3}$  ;      (B)  $\frac{V}{9}$  ;      (C)  $\frac{V}{27}$  ;      (D)  $\frac{V}{81}$  .

## HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

### §1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

- 1.1. Dùng phép đối xứng qua tâm của hình hộp.
- 1.2. Dùng phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AE}$  biến lăng trụ  $ABC.EFG$  thành lăng trụ  $EFG.A'B'C'$ .
- 1.3. Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Hai đường chéo  $AC, BD$  và hai đường thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện của hình vuông  $ABCD$  chia hình vuông  $ABCD$  thành tám tam giác bằng nhau. Xem mỗi tam giác đó là đáy của một hình chóp đỉnh  $S$  ta sẽ được tám hình chóp bằng nhau.
- 1.4. Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $G$  là giao điểm của các đường thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện. Khi đó dễ thấy các tứ diện  $GABC, GBCD, GCDA, GDAB$  bằng nhau.
- 1.5. Hình chóp có đáy là đa giác  $k$  cạnh.
- 1.6. Lấy một hình chóp  $S.A_1...A_{k-1}$  có đáy là đa giác  $k-1$  cạnh. Ghép thêm vào mặt  $SA_{k-1}A_1$  và về phía ngoài của hình chóp đó hình chóp  $B.SA_{k-1}A_1$  ta sẽ được một hình đa diện có  $2k + 1$  cạnh.
- 1.7. a) Gọi số mặt và số cạnh của một hình đa diện theo thứ tự là  $m$  và  $c$ . Do mỗi mặt có ít nhất ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên  $2c \geq 3m$ . Từ đó suy ra  $c > m$ .  
b) Gọi số đỉnh và số cạnh của một hình đa diện theo thứ tự là  $d$  và  $c$ . Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và qua hai đỉnh có đúng một cạnh nên  $2c \geq 3d$ . Từ đó suy ra  $c > d$ .
- 1.8. Gọi  $M_1$  là một mặt của hình đa diện  $(H)$ . Gọi  $A, B, C$  là ba đỉnh liên tiếp của  $M_1$ . Khi đó  $AB, BC$  là hai cạnh của  $(H)$ . Gọi  $M_2$  là mặt khác với  $M_1$  và có chung cạnh  $AB$  với  $M_1$ . Khi đó  $M_2$  còn có ít nhất một đỉnh  $D$  khác với  $A$  và  $B$ . Nếu  $D \equiv C$  thì  $M_1$  và  $M_2$  có hai cạnh chung  $AB$  và  $BC$ , điều này vô lí. Vậy  $D$  phải khác  $C$ . Do đó  $(H)$  có ít nhất bốn đỉnh  $A, B, C, D$ .

**1.13.** Ta có tứ giác  $ABCD$  là hình vuông có cạnh bằng  $a$  (h.1.16).

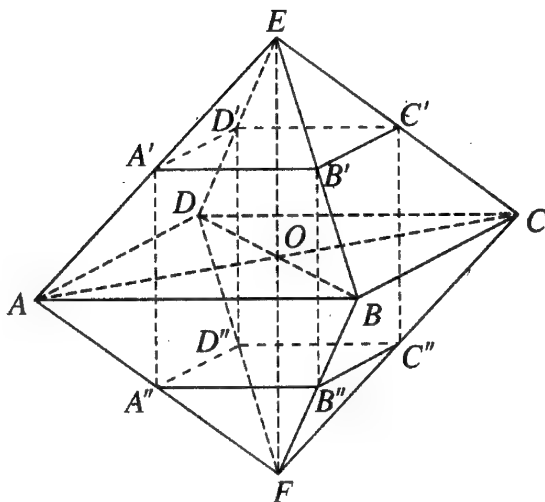
Do đó tứ giác  $A'B'C'D'$  là hình vuông có cạnh bằng  $\frac{a}{2}$  và

$(A'B'C'D') \parallel (A''B''C''D'')$ . Ngoài ra ta có  $A'A'' \parallel EF$  nên  $A'A'' \perp (A''B''C''D'')$ . Tương tự  $B'B''$ ,  $C'C''$ ,  $D'D''$  cũng song song với  $EF$ . Từ đó suy ra  $A'B'C'D'.A''B''C''D''$  là một hình hộp chữ nhật.

Vì  $EF = \sqrt{2}a$  nên  $A'A'' = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

Vậy hình hộp đó có ba kích thước là :

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \text{ và } \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



Hình 1.16

### §3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

**1.14.** Kẻ  $SH \perp (ABC)$ . Đường thẳng  $AH$  cắt  $BC$  tại  $I$ .

Do  $S.ABC$  là hình chóp tam giác đều nên  $H$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ .

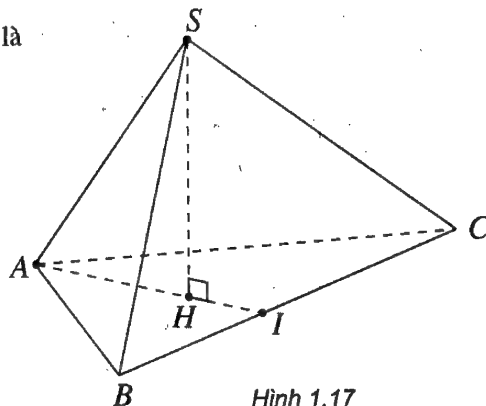
$$\text{Do đó } AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a, AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\widehat{SAH} = 60^\circ \text{ (h.1.17).}$$

$$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \sqrt{3} = a.$$

Thể tích khối chóp  $S.ABC$  là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3.$$



Hình 1.17

**1.15.** Kẻ  $SH \perp (ABC)$  và  $HA'$ ,  $HB'$ ,  $HC'$  lần lượt vuông góc với  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Theo định lí ba đường vuông góc ta có  $SA' \perp BC$ ,  $SB' \perp CA$ ,  $SC' \perp AB$  (h.1.18).

Từ đó suy ra  $\widehat{SA'H} = \widehat{SB'H} = \widehat{SC'H} = 60^\circ$ . Do đó các tam giác vuông  $\triangle SHA'$ ,  $\triangle SHB'$ ,  $\triangle SHC'$  bằng nhau. Từ đó suy ra  $HA' = HB' = HC'$ . Vậy  $H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Do tam giác  $ABC$  cân ở  $A$  nên  $AH$  vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Từ đó suy ra  $A, H, A'$  thẳng hàng và  $A'$  là trung điểm của  $BC$ .

Do đó  $AA'^2 = AB^2 - BA'^2 = 25a^2 - 9a^2 = 16a^2$ .

Vậy  $AA' = 4a$ .

Gọi  $p$  là nửa chu vi của tam giác  $ABC$ ,  
 $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

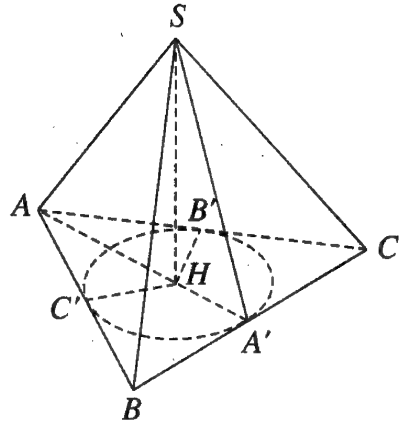
Khi đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 6a \cdot 4a = 12a^2 = pr = 8ar.$$

Từ đó suy ra  $r = \frac{3}{2}a$ .

Do đó  $SH = HA' \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2} \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$ .

Thể tích khối chóp là  $V = \frac{1}{3} \cdot 12a^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a = 6\sqrt{3}a^3$ .



Hình 1.18

1.16. a) Ta có  $\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ .

Vì  $AD \subset (SAB)$  nên  $AD \perp BC$ .

Mặt khác  $AD \perp SB$  nên  $AD \perp (SBC)$ .

Từ đó suy ra  $AD \perp SC$ .

$$\left. \begin{array}{l} SC \perp AE \\ SC \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (ADE) \Rightarrow SC \perp DE$$

hay  $SE \perp (ADE)$  (h.1.19).

Trong tam giác vuông  $SAB$  ta có :

$$SA \cdot AB = AD \cdot SB \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot SA}{SB} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

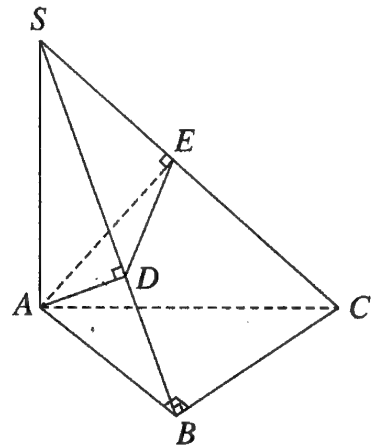
Tương tự, trong tam giác vuông  $SAC$  ta có :

$$AE = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Do  $AD \perp (SBC)$  nên  $AD \perp DE$ . Từ đó suy ra

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}} = \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}}$$

$$SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Hình 1.19



$$\begin{aligned}
\text{Vậy } V_{S.ADE} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DE \cdot SE \\
&= \frac{1}{6} \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot \frac{c^2 b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{abc^5}{6(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.
\end{aligned}$$

b) Gọi  $d$  là khoảng cách từ  $E$  đến mặt phẳng  $(SAB)$ .

$$\text{Ta có } SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{c^2 - \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

$$V_{S.ADE} = V_{E.SAD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SD \cdot AD \cdot d = \frac{1}{6} \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} d = \frac{1}{6} \frac{ac^3}{a^2 + c^2} d.$$

$$\text{Kết hợp với kết quả trong câu a) ta suy ra } d = \frac{bc^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**1.17.** Ta có tứ diện đều  $ABCD$ ,  $M$  là một điểm trong của nó. Gọi  $V$  là thể tích,  $S$  là diện tích mỗi mặt của tứ diện đều  $ABCD$ ,  $h_A, h_B, h_C, h_D$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các mặt  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ .

$$\text{Khi đó ta có } V = V_{MBCD} + V_{MCDA} + V_{MDAB} + V_{MABC} = \frac{1}{3} S(h_A + h_B + h_C + h_D).$$

$$\text{Từ đó suy ra } h_A + h_B + h_C + h_D = \frac{3V}{S}.$$

**1.18. a)** Thể tích khối chóp  $M.AB'C$  bằng thể tích khối chóp  $B'.AMC$  (h.1.20). Ta có

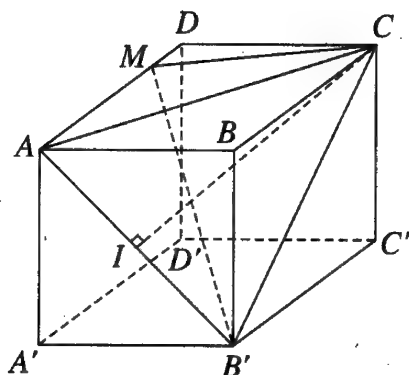
$$S_{AMC} = \frac{3}{4} S_{ADC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } V_{M.AB'C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot a = \frac{a^3}{4}.$$

b) Gọi  $h$  là khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(AB'C)$ .

$$\text{Khi đó } V_{M.AB'C} = \frac{1}{3} S_{AB'C} \cdot h = \frac{a^3}{4}.$$

Vì  $AC^2 = B'C^2 = 5a^2$  nên tam giác  $ACB'$  cân tại  $C$ . Do đó đường trung tuyến  $CI$  của tam giác  $ACB'$  cũng là đường cao.



Hình 1.20

Ta có :  $CI^2 = CA^2 - AI^2 = 5a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{9a^2}{2}$ .

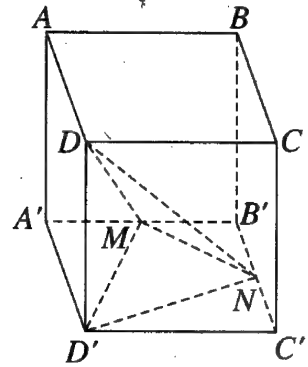
Do đó  $CI = \frac{3a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{AB'C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}$ . Từ đó suy ra  $h = 3 \cdot \frac{a^3}{4} : \frac{3a^2}{2} = \frac{a}{2}$ .

**1.19.** Thể tích khối chóp  $D'.DMN$  bằng thể tích khối chóp  $D.D'MN$ .

Ta có  $S_{D'MN} = S_{ABC'D'} - (S_{D'A'M} + S_{D'C'N} + S_{B'MN})$   
 $= ab - \left(\frac{ab}{4} + \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4}\right) = \frac{3ab}{8}$ .

Thể tích khối chóp  $D'.DMN = \frac{1}{3} \cdot \frac{3ab}{8} \cdot c = \frac{abc}{8}$ .

Từ đó suy ra tỉ số giữa thể tích khối chóp  $D'.DMN$  và thể tích khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng  $\frac{1}{8}$  (h.1.21).



Hình 1.21

**1.20.** Giả sử  $(AEF)$  cắt  $CC'$  tại  $I$  (h.1.22). Khi đó ta có

$AE \parallel FI$ ,  $AF \parallel EI$  nên tứ giác  $AEFI$  là hình bình hành. Trên cạnh  $CC'$  lấy điểm  $J$  sao cho  $CJ = DF$ . Vì  $CJ$  song song và bằng  $DF$  nên  $JF$  song song và bằng  $CD$ . Do đó tứ giác  $CDFJ$  là hình chữ nhật. Từ đó suy ra  $FJ$  song song và bằng  $AB$ . Do đó  $AF$  song song và bằng  $BJ$ . Vì  $AF$  cũng song song và bằng  $EI$  nên  $BJ$  song song và bằng  $EI$ . Từ đó suy ra  $IJ = EB = DF = JC = \frac{c}{3}$ .

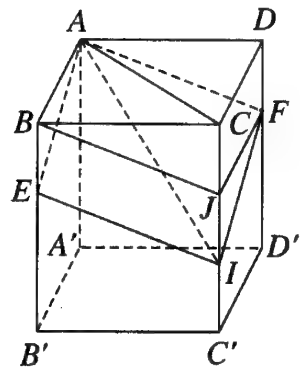
Ta có  $S_{BCIE} = \frac{1}{2} \left( \frac{c+2c}{3} \right) b = \frac{bc}{2}$ ,

$S_{DCIF} = \frac{1}{2} \left( \frac{c+2c}{3} \right) a = \frac{ac}{2}$

nên  $V_{(H)} = V_{A.BCIE} + V_{A.DCIF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{ac}{2} \cdot b = \frac{abc}{3}$ .

Vì thể tích khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng  $abc$  nên  $V_{(H')} = \frac{2}{3} abc$ .

Từ đó suy ra  $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$ .



Hình 1.22

1.21. Giả sử đường thẳng  $EF$  cắt đường thẳng  $A'B'$  tại  $I$  và cắt đường thẳng  $A'D'$  tại  $J$ .  $AI$  cắt  $BB'$  tại  $L$ ,  $AJ$  cắt  $DD'$  tại  $M$ . Gọi  $V_0$  là thể tích khối tứ diện  $AA'IJ$ .  $V$  là thể tích khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  (h.1.23).

$$\text{Vì } EB' = EC' \text{ và } B'I \parallel C'F \text{ nên } IB' = FC' = \frac{A'B'}{2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}.$$

Để ý rằng  $B'E \parallel A'J$ ,  $B'L \parallel A'A$ .

$$\text{Ta có } \frac{IL}{IA} = \frac{IE}{IJ} = \frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \frac{V_{I,ELB'}}{V_{I,JAA'}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

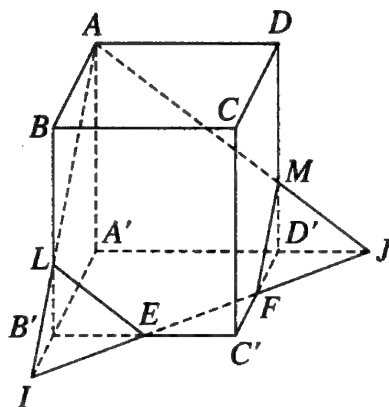
$$\text{Do đó } V_{I,ELB'} = \frac{1}{27} V_0.$$

$$\text{Tương tự } V_{J,MFD'} = \frac{1}{27} V_0.$$

Gọi  $AB = a$ ,  $BC = b$ , đường cao hạ từ  $A$  xuống  $(A'B'C'D')$  là  $h$  thì

$$V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = hab \cdot \sin \widehat{BAD}, \quad V_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3b}{2} \cdot \sin \widehat{BAD} \right) h = \frac{3V}{8}.$$

$$\text{Vậy } V_{(H)} = V_0 - \frac{2}{27} V_0 = \frac{25}{27} V_0 = \frac{25}{27} \cdot \frac{3V}{8} = \frac{25}{72} V, \quad V_{(H')} = \frac{47}{72} V, \quad \frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{25}{47}.$$



Hình 1.23

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.22. Không phải. Vì trong hình đó có cạnh (chẳng hạn  $AB$ ) không phải là cạnh chung của đúng hai đa giác.

1.23. Lấy một đỉnh  $B$  tùy ý của hình đa diện  $(H)$ . Gọi  $M_1$  là một mặt của hình đa diện  $(H)$  chứa  $B$ . Gọi  $A, C$  là ba đỉnh liên tiếp của  $M_1$ . Khi đó  $AB, BC$  là hai cạnh của  $(H)$ . Gọi  $M_2$  là mặt khác với  $M_1$  và có chung cạnh  $AB$  với  $M_1$ . Khi đó  $M_2$  còn có ít nhất một đỉnh  $D$  sao cho  $A, B, D$  là ba đỉnh khác nhau liên tiếp của  $M_2$ . Nếu  $D \equiv C$  thì  $M_1$  và  $M_2$  có hai cạnh chung  $AB$  và  $BC$ , điều này vô lí. Vậy  $D$  phải khác  $C$ . Do đó qua đỉnh  $B$  có ít nhất ba cạnh  $BA, BC$  và  $BD$ .

1.24. Gọi  $M_1$  là một mặt của hình đa diện  $(H)$ . Khi đó  $M_1$  có ít nhất ba cạnh liên tiếp  $c_1, c_2, c_3$ . Gọi  $M_2$  là mặt khác  $M_1$  và có chung cạnh  $c_1$  với  $M_1$ . Như thế  $M_2$  còn có ít nhất hai cạnh  $c_4, c_5$  khác  $c_1$  nữa. Vì  $M_1$  và  $M_2$  đã có một cạnh chung  $c_1$  thì cạnh chung đó phải

duy nhất nên  $c_4, c_5$  phải khác  $c_2, c_3$ . Như vậy  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  khác nhau. Gọi  $M_3$  là mặt khác  $M_1$  và có chung cạnh  $c_2$  với  $M_1$ . Khi đó  $M_3$  có ít nhất hai cạnh  $c_6$  và  $c_7$  (khác  $c_2$ ) nữa. Do  $c_2$  là cạnh chung duy nhất của  $M_1$  và  $M_3$  nên  $c_6$  khác với  $c_1$  và  $c_3$ . Tương tự,  $c_7$  cũng khác với  $c_1$  và  $c_3$ .

Nếu  $c_6$  khác với  $c_4$  và  $c_5$  thì  $(H)$  có ít nhất 6 cạnh là  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ .

Nếu  $c_6 = c_4$  thì vì  $M_2$  và  $M_3$  chỉ có thể có nhiều nhất một cạnh chung nên  $c_7$  phải khác  $c_4$  và  $c_5$ . Khi đó  $(H)$  có ít nhất 6 cạnh là  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_7$ .

Nếu  $c_6 = c_5$  thì lí luận tương tự như trên  $(H)$  cũng có ít nhất 6 cạnh.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

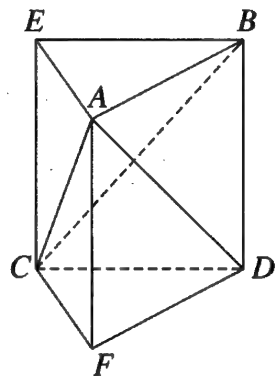
**1.25.** Giả sử tồn tại hình đa diện  $(H)$  có 7 cạnh. Khi đó  $(H)$  không có mặt nào có số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4. Thật vậy, giả sử  $(H)$  có mặt  $S$  có số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4. Do mỗi đỉnh của  $S$  là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh nên tại mỗi đỉnh của nó có thêm ít nhất một cạnh đi qua. Vậy số cạnh của  $(H)$  lớn hơn hoặc bằng 8. Điều này trái với giả thiết. Vậy các mặt của  $(H)$  là những tam giác. Gọi  $c, m$  lần lượt là số cạnh, số mặt của  $(H)$ . Do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có  $3m = 2c = 14$ . Điều này vô lí vì  $m$  là số nguyên dương.

**1.26.** Dựng  $BE$  song song và bằng  $DC$ ,  $DF$  song song và bằng  $BA$ . Khi đó  $ABE.FDC$  là một lăng trụ đứng (h.1.24).

$$\text{Ta có : } S_{ABE} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin 60^\circ = ab \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$V_{C.ABE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} ab \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} abh.$$

$$\text{Từ đó suy ra } V_{A.BCD} = V_{A.BCE} = \frac{\sqrt{3}}{12} abh.$$



Hình 1.24

**1.27.** Chia đáy của lăng trụ đã cho thành năm tam giác cân có chung đỉnh  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Khi đó diện tích đáy bằng  $\frac{5}{2} r^2 \sin 72^\circ$ . Do đó thể tích lăng trụ đó bằng  $\frac{5}{2} hr^2 \sin 72^\circ$ .

**1.28.** Gọi cạnh của tứ diện đều  $ABCD$  là  $a$  thì cạnh của hình bát diện đều  $(H)$  là  $\frac{a}{2}$ . Khi đó

$$V_{ABCD} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}, \quad V_{(H)} = \frac{1}{3} \left( \frac{a}{2} \right)^3 \sqrt{2} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{24}. \quad \text{Từ đó suy ra } \frac{V_{(H)}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

1.29. a) Gọi  $S$  là giao của hai đường thẳng  $MN$  và  $BB'$ . Khi đó  $S, I, J$  là điểm chung của cả hai mặt phẳng  $(MNE)$  và  $(ABB'A')$  nên chúng thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng  $BB', MN$  và  $IJ$  đồng quy. Đa diện  $IBMJB'L$  có hai mặt  $(IBM)$  và  $(JB'L)$  song song, các cạnh  $BB', MN$  và  $IJ$  đồng quy nên nó là một hình chóp cắt. Tương tự, đa diện  $A'EJAFI$  cũng là một hình chóp cắt (h.1.25).

b) Hai tam giác  $NCF$  và  $NC'E$  có  $\widehat{C} = \widehat{C'} = 90^\circ$ ,  
 $NC = NC'$ ,  $\widehat{CNF} = \widehat{C'NE}$  nên chúng bằng nhau.

$$\text{Do đó } CF = C'E = \frac{a}{2}.$$

Tương tự,  $CL = CM = \frac{a}{2}$ . Từ đó suy ra tam giác  $MCF$

cân ở  $C$ . Ngoài ra ta còn có  $\widehat{CMF} = \widehat{BML} = 30^\circ$

và  $\widehat{IBM} = 60^\circ$  nên  $\widehat{MIB} = 90^\circ$ ,  $IB = \frac{BM}{2} = \frac{a}{4}$

$$\text{và } IM = \frac{\sqrt{3}}{2} BM = \frac{\sqrt{3}}{4} a.$$

Vì  $FI \perp AB$ ,  $FI \perp AA'$  nên  $FI \perp (AIIA')$ . Ta có diện tích hình thang vuông  $AA'JI$  bằng

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} \right) b = \frac{ab}{2}.$$

Gọi  $K$  là trung điểm của  $MF$  thì do tam giác  $MCF$  cân ở  $C$  nên  $CK \perp MF$ . Từ đó suy ra hai tam giác vuông  $CMK$  và  $BMI$  bằng nhau.

$$\text{Do đó } MF = MK = MI. \text{ Từ đó suy ra } FI = \frac{3\sqrt{3}}{4} a. \text{ Vậy } V_{F.AIIA'} = \frac{1}{3} \left( \frac{ab}{2} \right) \frac{3\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 b.$$

c) Lí luận như ở câu b) ta có  $CL = CM = \frac{a}{2}$ ,  $LJ \perp A'B'$  và  $LJ = \frac{3\sqrt{3}}{4} a$ .

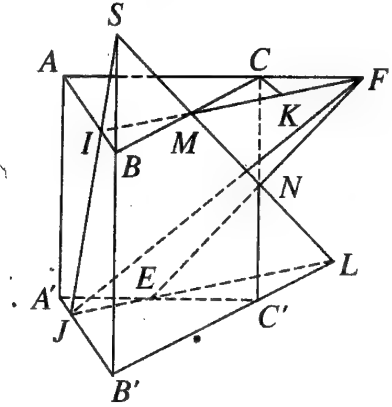
Giả sử mặt phẳng  $(MNE)$  chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện  $(H)$  và  $(H')$ , trong đó  $(H)$  là khối đa diện chứa đỉnh  $A$ ,  $(H')$  là khối đa diện chứa đỉnh  $B'$ .

$$\text{Ta thấy } V_{(H')} = V_{IBMJB'L} - V_{N.EC'L}, \quad V_{(H)} = V_{JA'E.IAF} - V_{N.FCM}.$$

$$\text{Vì } \triangle IBM = \triangle JA'E, \triangle JB'L = \triangle IAF, BB' = A'A \text{ nên } V_{IBMJB'L} = V_{JA'E.IAF}.$$

Ngoài ra hai hình chóp  $N.EC'L$  và  $N.FCM$  có đường cao bằng nhau và có đáy là những tam giác bằng nhau nên chúng có thể tích bằng nhau.

$$\text{Từ đó suy ra } V_{(H)} = V_{(H')}.$$



Hình 1.25

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- 1.30 (D) 1.32 (D) 1.34 (B) 1.36 (A) 1.38 (D) 1.40 (C) 1.42 (B) 1.44 (C).  
 1.31 (B) 1.33 (C) 1.35 (C) 1.37 (C) 1.39 (A) 1.41 (B) 1.43 (A)

# CHƯƠNG II

## MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

---

### §1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I- SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY

Trong không gian cho mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $\Delta$  và chứa đường  $\mathcal{C}$ . Khi quay mặt phẳng  $(P)$  xung quanh  $\Delta$  một góc  $360^\circ$  thì đường  $\mathcal{C}$  tạo nên một mặt tròn xoay. Mặt tròn xoay đó nhận  $\Delta$  làm trục, đường  $\mathcal{C}$  được gọi là đường sinh.

#### II- TÍNH CHẤT CỦA MẶT TRÒN XOAY

- Nếu cắt mặt tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục  $\Delta$  ta được giao tuyến là một đường tròn có tâm trên  $\Delta$ .
- Mỗi điểm  $M$  trên mặt tròn xoay đều nằm trên một đường tròn thuộc mặt tròn xoay và đường tròn này có tâm thuộc trục tròn xoay  $\Delta$ .

#### III- MẶT NÓN TRÒN XOAY

**1. Định nghĩa.** Trong mặt phẳng  $(P)$  cho hai đường thẳng  $\Delta$  và  $d$  cắt nhau tại  $O$  tạo thành góc  $\alpha$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng  $d$  khi quay mặt phẳng  $(P)$  xung quanh  $\Delta$  sao cho góc  $\alpha$  không đổi gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh  $O$ . Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng  $\Delta$  gọi là trục, đường thẳng  $d$  gọi là đường sinh, góc  $2\alpha$  gọi là góc ở đỉnh của mặt nón tròn xoay.

## 2. Tính chất

a) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh  $O$  bởi mặt phẳng đi qua đỉnh  $O$  ta có các trường hợp sau đây :

- Mặt phẳng cắt mặt nón theo hai đường sinh ;
- Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này người ta gọi mặt phẳng đó là *tiếp diện* của mặt nón ;
- Mặt phẳng chỉ có một điểm  $O$  chung duy nhất với mặt nón, ngoài ra không có một điểm chung nào khác.

b) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh  $O$  bởi mặt phẳng  $(P)$  không đi qua đỉnh  $O$  ta có các trường hợp sau đây :

- Nếu mặt phẳng  $(P)$  cắt mọi đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là một đường elip hoặc là một đường tròn (khi mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với trục  $\Delta$  của mặt nón) ;
- Nếu mặt phẳng  $(P)$  song song với chỉ một đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là một đường parabol ;
- Nếu mặt phẳng  $(P)$  song song với hai đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là hai nhánh của một đường hypebol.

## 3. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay

Cho tam giác  $OIM$  vuông tại  $I$ . Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông  $OI$  thì đường gấp khúc  $OMI$  tạo thành một hình gọi là *hình nón tròn xoay* (hay *hình nón*). Hình tròn tâm  $I$  bán kính  $IM$  gọi là *mặt đáy*, điểm  $O$  gọi là *đỉnh*, độ dài  $OI$  gọi là *chiều cao* và độ dài  $OM$  gọi là *đường sinh* của hình nón đó.

*Khối nón tròn xoay* (hay *khối nón*) là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó.

## 4. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay

Gọi  $S_{xq}$  là diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng  $r$  và có độ dài đường sinh bằng  $l$ .

Ta có công thức :  $S_{xq} = \pi rl$ .

Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình nón cộng diện tích đáy của hình nón.

### 5. Thể tích khối nón tròn xoay

Gọi  $V$  là thể tích của khối nón tròn xoay có chiều cao  $h$  và có diện tích đáy là  $B$ .

Ta có công thức  $V = \frac{1}{3} Bh$ . Nếu bán kính đáy bằng  $r$  ta có  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

## IV- MẶT TRỤ TRÒN XOAY

**1. Định nghĩa.** Trong mặt phẳng  $(P)$  cho hai đường thẳng  $\Delta$  và  $l$  song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng  $r$ . Khi quay mặt phẳng  $(P)$  xung quanh trục  $\Delta$  thì đường thẳng  $l$  sinh ra một mặt tròn xoay gọi là *mặt trụ tròn xoay* và được gọi tắt là *mặt trụ*. Đường thẳng  $\Delta$  gọi là *trục* của mặt trụ, đường thẳng  $l$  gọi là *đường sinh* của mặt trụ và  $r$  là bán kính của mặt trụ đó.

### 2. Tính chất

a) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính đáy bằng  $r$ ) bởi một mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với trục  $\Delta$  thì ta được một đường tròn có tâm trên  $\Delta$  và có bán kính bằng  $r$ ,  $r$  cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.

b) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính đáy bằng  $r$ ) bởi một mặt phẳng  $(\alpha)$  không vuông góc với trục  $\Delta$  nhưng cắt tất cả các đường sinh ta được giao tuyến là đường elip có trục nhỏ bằng  $2r$  và trục lớn bằng  $\frac{2r}{\sin \varphi}$  trong đó  $\varphi$  là

góc giữa trục  $\Delta$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ).

c) Nếu  $M$  là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là  $\Delta$  và có bán kính  $r$  thì đường thẳng  $l'$  đi qua  $M$  và song song với  $\Delta$  sẽ nằm trên mặt trụ đó và như vậy  $l'$  là một đường sinh của mặt trụ đã cho.

d) Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với trục  $\Delta$  của mặt trụ tròn xoay và cách  $\Delta$  một khoảng bằng  $h$ . Nếu  $h < r$  thì mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt trụ theo hai đường sinh, nếu  $h = r$  thì mặt phẳng  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh, còn nếu  $h > r$  thì mặt phẳng  $(\alpha)$  không cắt mặt trụ.



### 3. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Khi quay hình chữ nhật đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, ví dụ cạnh  $AB$ , thì đường gấp khúc  $ADCB$  tạo thành một hình gọi là *hình trụ tròn xoay* (hay *hình trụ*).

Khi quay quanh  $AB$ , hai cạnh  $AD$  và  $BC$  sẽ tạo ra hai hình tròn bằng nhau gọi là *hai đáy* của hình trụ, còn cạnh  $CD$  là *đường sinh* tạo ra *mặt xung quanh* của hình trụ. Khoảng cách  $AB$  giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là *chiều cao* của hình trụ.

*Khối trụ tròn xoay* là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó. Khối trụ tròn xoay còn được gọi tắt là *khối trụ*. Ta gọi *mặt đáy*, *chiều cao*, *đường sinh* của một khối trụ theo thứ tự là mặt đáy, chiều cao, đường sinh của hình trụ tương ứng làm giới hạn cho khối trụ đó.

### 4. Diện tích xung quanh của hình trụ

Nếu gọi  $S_{xq}$  là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng  $r$  và có đường sinh bằng  $l$  ta có công thức :

$$S_{xq} = 2\pi rl$$

Diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình trụ đó cộng với diện tích hai đáy của hình trụ.

### 5. Thể tích khối trụ

Gọi  $V$  là thể tích khối trụ tròn xoay có chiều cao  $h$  và có diện tích đáy là  $B$ . Ta có công thức  $V = Bh$ . Nếu bán kính đáy bằng  $r$  ta có

$$V = \pi r^2 h.$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Chứng minh đường thẳng  $d$  luôn luôn thuộc một mặt nón hay mặt trụ tròn xoay xác định

## 1. Phương pháp giải

Cần khai thác các tính chất của đường thẳng  $d$  qua các giả thiết của bài toán để đưa về kết luận  $d$  có thể thuộc mặt nón tròn xoay hoặc thuộc mặt trụ tròn xoay.

## 2. Ví dụ

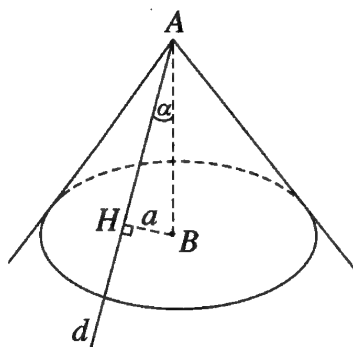
**Ví dụ 1.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định. Một đường thẳng  $d$  di động luôn luôn đi qua  $A$  và cách  $B$  một đoạn không đổi  $a = \frac{AB}{2}$ . Chứng minh rằng  $d$  luôn luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay.

### Giải

Ta hãy xét một vị trí tùy ý của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A$ . Trong mặt phẳng  $(d, AB)$  kẻ  $BH \perp d$  tại  $H$  và gọi  $\alpha = \widehat{HAB}$ .

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Vậy  $\alpha$  không đổi, suy ra  $d$  nằm trên mặt nón đỉnh  $A$ , nhận  $AB$  làm trục và có góc ở đỉnh bằng  $2\alpha = 60^\circ$  (h.2.1).

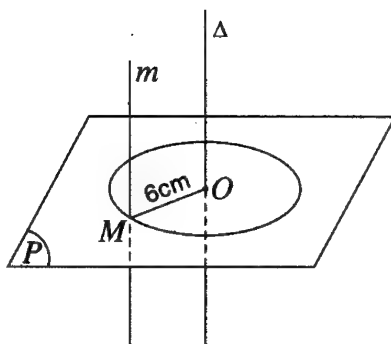


Hình 2.1

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng  $(P)$  cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $r = 6$  cm. Qua điểm  $M$  bất kì nằm trên đường tròn, ta kẻ đường thẳng  $m$  vuông góc với  $(P)$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $m$  nằm trên một mặt trụ tròn xoay xác định.

### Giải

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  tại  $O$ . Vì  $m \perp (P)$  nên  $m \parallel \Delta$ . Đường thẳng  $m$  luôn luôn cách đường thẳng  $\Delta$  cố định một khoảng  $OM = 6$  cm. Vậy đường thẳng  $m$  nằm trên mặt trụ tròn xoay nhận  $\Delta$  làm trục và có bán kính  $r = 6$  cm (h.2.2).



Hình 2.2



Giải các bài toán tìm thiết diện của một mặt phẳng với khối nón. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

### 1. Phương pháp giải

Sử dụng giả thiết và các tính chất của thiết diện tạo bởi mặt phẳng với hình nón (khối nón) để tính diện tích thiết diện, diện tích xung quanh, thể tích của khối nón. Sau khi xác định được các yếu tố có liên quan đến thiết diện, diện tích xung quanh hoặc thể tích của khối nón, cần khéo léo sử dụng các công thức tính diện tích trong hình học phẳng và tìm độ dài các đoạn thẳng dựa vào các hệ thức lượng trong tam giác.

### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho khối nón tròn xoay có đường cao  $h = 20$  cm, bán kính đáy  $r = 25$  cm. Một mặt phẳng  $(P)$  đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm  $O$  của đáy là 12 cm. Hãy xác định thiết diện của  $(P)$  với khối nón và tính diện tích thiết diện đó.

#### Giải

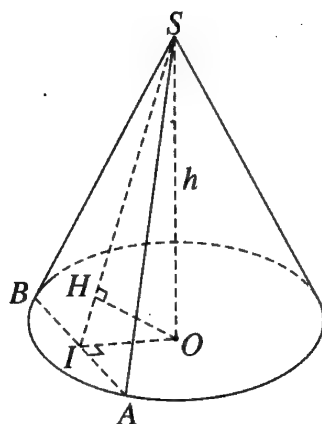
Gọi  $S$  là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng  $(P)$  đi qua đỉnh  $S$  cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là  $SA = SB$  nên ta có thiết diện là tam giác cân  $SAB$  (h.2.3).

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ , ta có  $OI \perp AB$ . Từ tâm  $O$  của đáy ta kẻ  $OH \perp SI$  tại  $H$ , ta có  $OH \perp (SAB)$  và do đó theo giả thiết ta có  $OH = 12$  cm. Xét tam giác vuông  $SOI$  ta có :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}$$

$$\Rightarrow OI = 15 \text{ (cm)}.$$

Mặt khác, xét tam giác vuông  $SOI$  ta còn có :  $OS.OI = SI.OH$ .



Hình 2.3

$$\text{Do đó } SI = \frac{OS.OI}{OH} = \frac{20.15}{12} = 25 \text{ (cm)}.$$

Gọi  $S_t$  là diện tích thiết diện  $SAB$ . Ta có :  $S_t = \frac{1}{2} AB.SI$ , trong đó  $AB = 2AI$ .

Vì  $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$  nên  $AI = 20$  cm và  $AB = 40$  cm.

Vậy thiết diện  $SAB$  có diện tích là :  $S_t = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500 \text{ (cm}^2\text{)}.$

**Ví dụ 2.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón có đỉnh là tâm  $O$  của hình vuông  $ABCD$  và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông  $A'B'C'D'$ .

**Giải**

Khối nón có chiều cao bằng  $a$  và có bán kính đáy  $r = \frac{a}{2}$  (h.2.4).

Do đó diện tích xung quanh của khối nón được tính theo công thức :

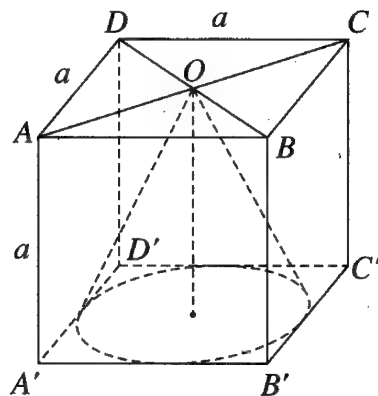
$$S_{xq} = \pi r l \text{ trong đó } l = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}.$$

Thể tích của khối nón được tính theo công thức :

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a.$$

$$\text{Vậy : } V = \frac{1}{12} \pi a^3.$$



Hình 2.4



Cho các yếu tố để xác định mặt trụ tròn xoay hoặc khối trụ tròn xoay hoặc hình trụ tròn xoay. Giải các bài toán tìm thiết diện của một mặt phẳng với khối trụ, tính diện tích xung quanh của hình trụ và tính thể tích của khối trụ.

### 1. Phương pháp giải

Sử dụng giả thiết và các tính chất của thiết diện tạo bởi mặt phẳng với hình trụ (khối trụ) để tính diện tích của thiết diện, diện tích xung quanh, thể tích của khối trụ.

### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Một khối trụ có chiều cao bằng 20 cm và có bán kính đáy bằng 10 cm. Người ta kẻ hai bán kính  $OA$  và  $OB'$  lần lượt nằm trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc bằng  $30^\circ$ . Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng  $AB'$  và song song với trục của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

#### Giải

Từ một đáy của khối trụ ta vẽ hai bán kính  $OA$ ,  $OB$  sao cho  $\widehat{AOB} = 30^\circ$ . Gọi  $A'$ ,  $O'$ ,  $B'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$ ,  $O$ ,  $B$  trên mặt đáy còn lại. Ta có  $OA$  và  $O'B'$  tạo với nhau một góc  $30^\circ$ . Thiết diện là hình chữ nhật  $ABB'A'$  có :

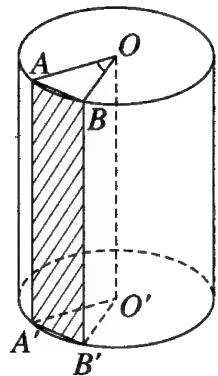
$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 30^\circ \\ &= 2r^2 - 2r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = r^2(2 - \sqrt{3}) = 100(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AB = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm.}$$

Mặt khác ta có  $AA' = BB' = OO' = 20$  cm (h.2.5).

Do đó thiết diện là hình chữ nhật  $ABB'A'$  có diện tích là :

$$S = AB \times BB' = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times 20 = 200\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 2.5

**Ví dụ 2.** Một khối trụ có bán kính đáy bằng  $r$  và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

- Tính diện tích xung quanh của khối trụ đó.
- Tính thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho (hình lăng trụ này có đáy là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy của hình trụ).
- Gọi  $V$  là thể tích hình lăng trụ đều nội tiếp trong hình trụ và  $V'$  là thể tích khối trụ. Hãy tính tỉ số  $\frac{V}{V'}$ .

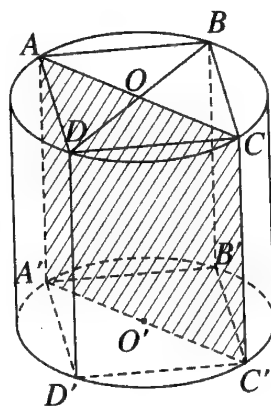
### ***Giải***

a) Vì thiết diện qua trục hình trụ là một hình vuông nên đường sinh  $l$  bằng đường cao  $h$  và bằng  $2r$ . Do đó diện tích xung quanh của khối trụ đó là :  $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$  (h.2.6).

b) Gọi  $ABCD.A'B'C'D'$  là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho. Ta có hình vuông  $ABCD$  nội tiếp trong đường tròn đáy. Do đó  $AB = r\sqrt{2}$  và ta tính được thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho là :  $V = S_{ABCD} \cdot AA' = (r\sqrt{2})^2 \cdot 2r = 4r^3$ .

c) Gọi  $V'$  là thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng  $r$  và có chiều cao bằng  $2r$ .

Ta có  $V' = Bh = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$ . Vậy :  $\frac{V}{V'} = \frac{4r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{\pi}$ .



Hình 2.6

## **C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP**

**2.1.** Một hình nón tròn xoay có đỉnh là  $D$ ,  $O$  là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng  $l$  và có góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng  $\alpha$ .

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo nên.

b) Gọi  $I$  là một điểm trên đường cao  $DO$  của hình nón sao cho  $\frac{DI}{DO} = k$  ( $0 < k < 1$ ). Tính diện tích thiết diện qua  $I$  và vuông góc với trục của hình nón.

- 2.2. Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng  $a$ .
- Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.
  - Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ . Tính diện tích thiết diện được tạo nên.
- 2.3. Cho  $S.ABC$  là hình chóp tam giác đều có các cạnh bên bằng  $a$  và có góc giữa các mặt bên và mặt phẳng đáy là  $\alpha$ . Hình nón đỉnh  $S$  có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều  $ABC$  gọi là hình nón nội tiếp hình chóp đã cho. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo  $a$  và  $\alpha$ .
- 2.4. Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có chiều cao  $SO = h$  và góc  $\widehat{SAB} = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh  $S$  và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông  $ABCD$  của hình chóp.
- 2.5. Chứng minh rằng trong một khối nón tròn xoay, góc ở đỉnh là góc lớn nhất trong số các góc được tạo nên bởi hai đường sinh của khối nón đó.
- 2.6. Cho khối nón có bán kính đáy  $r = 12$  cm và có góc ở đỉnh là  $\alpha = 120^\circ$ . Hãy tính diện tích của thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau.
- 2.7. Cho mặt phẳng  $(P)$ . Gọi  $A$  là một điểm nằm trên  $(P)$  và  $B$  là một điểm nằm ngoài  $(P)$  sao cho hình chiếu  $H$  của  $B$  trên  $(P)$  không trùng với  $A$ . Một điểm  $M$  chạy trên mặt phẳng  $(P)$  sao cho góc  $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$ . Chứng minh rằng điểm  $M$  luôn luôn nằm trên một mặt trụ tròn xoay có trục là  $AB$ .
- 2.8. Cho mặt trụ tròn xoay  $(\mathcal{T})$  và một điểm  $S$  cố định nằm ngoài  $(\mathcal{T})$ . Một đường thẳng  $d$  thay đổi luôn luôn đi qua  $S$  cắt  $(\mathcal{T})$  tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  luôn luôn nằm trên một mặt trụ xác định.
- 2.9. Một khối trụ có bán kính đáy bằng  $r$  và chiều cao bằng  $r\sqrt{3}$ .  
Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc được tạo thành giữa đường thẳng  $AB$  và trục của khối trụ bằng  $30^\circ$ .
- Tính diện tích của thiết diện qua  $AB$  và song song với trục của khối trụ.
  - Tính góc giữa hai bán kính đáy qua  $A$  và  $B$ .
  - Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của  $AB$  và trục của khối trụ.

- 2.10.** Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm  $O$  và  $O'$  bán kính  $r$  và có đường cao  $h = r\sqrt{2}$ . Gọi  $A$  là một điểm trên đường tròn tâm  $O$  và  $B$  là một điểm trên đường tròn tâm  $O'$  sao cho  $OA$  vuông góc với  $O'B$ .
- Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện  $OABO'$  là những tam giác vuông. Tính thể tích của tứ diện này.
  - Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $AB$  và song song với  $OO'$ . Tính khoảng cách giữa trục  $OO'$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ .
  - Chứng minh rằng  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt trụ trục  $OO'$  có bán kính bằng  $\frac{r\sqrt{2}}{2}$  dọc theo một đường sinh.
- 2.11.** Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao  $h = 50$  cm.
- Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.
  - Một đoạn thẳng có chiều dài 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.
- 2.12.** Hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = a$  và có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng  $\alpha$ . Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đáy của hình chóp và có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp. Các mặt bên  $SAB, SBC, SCA$  cắt hình trụ theo những giao tuyến như thế nào ?

## §2. MẶT CẦU

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I- MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM CÓ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

**1.** Tập hợp tất cả các điểm  $M$  trong không gian cách một điểm  $O$  cố định một khoảng không đổi bằng  $r$  ( $r > 0$ ) được gọi là *mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $r$*  và thường được kí hiệu là  $S(O; r)$ .

Cho mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $r$  và  $M$  là một điểm bất kì trong không gian.

– Nếu  $OM = r$  thì ta nói điểm  $M$  nằm trên mặt cầu  $S(O; r)$ .



- Nếu  $OM < r$  thì ta nói điểm  $M$  nằm trong mặt cầu  $S(O ; r)$ .
- Nếu  $OM > r$  thì ta nói điểm  $M$  nằm ngoài mặt cầu  $S(O ; r)$ .

2. Mặt cầu là một mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính  $AB$  của nửa đường tròn đó. Giao tuyến của mặt cầu với các nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là *đường kinh tuyến* của mặt cầu. Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục gọi là *vĩ tuyến* của mặt cầu.

## II- GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu  $S(O ; r)$  và mặt phẳng  $(P)$ .  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên mặt phẳng  $(P)$ . Khi đó  $OH = h$  là khoảng cách từ tâm  $O$  của mặt cầu tới mặt phẳng  $(P)$ . Ta có các trường hợp :

1. Nếu  $h > r$  : mặt phẳng  $(P)$  không cắt mặt cầu ;
2. Nếu  $h = r$  : mặt phẳng  $(P)$  tiếp xúc với mặt cầu tại điểm  $H$ . Ta có  $OH \perp (P)$  ;
3. Nếu  $h < r$  : mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính


$$r' = \sqrt{r^2 - h^2} .$$

Đặc biệt khi  $h = 0$  mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính  $r' = r$ .

## III- GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG, TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu  $S(O ; r)$  và đường thẳng  $\Delta$ .


1. Trường hợp  $\Delta$  đi qua tâm  $O$  của mặt cầu thì  $\Delta$  cắt mặt cầu tại hai điểm  $A, B$  với  $AB = 2r$ .
2. Trường hợp  $\Delta$  không đi qua tâm  $O$  của mặt cầu, ta gọi  $d$  là khoảng cách từ tâm  $O$  đến đường thẳng  $\Delta$ , khi đó :
  - a) Nếu  $d < r$ , đường thẳng  $\Delta$  cắt mặt cầu tại hai điểm  $M, N$  ;
  - b) Nếu  $d = r$ , đường thẳng  $\Delta$  tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm  $H$   
( $H$  gọi là tiếp điểm và đường thẳng  $\Delta$  được gọi là tiếp tuyến của mặt cầu) ;
  - c) Nếu  $d > r$ , đường thẳng  $\Delta$  không cắt mặt cầu.

 **Chú ý.** • Qua một điểm  $A$  bất kì trên mặt cầu  $S(O ; r)$  có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính  $OA$  của mặt cầu và đều nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  $S(O ; r)$  tại  $A$ . Mặt phẳng tiếp xúc này vuông góc với đường thẳng  $OA$  tại  $A$ .

- Qua một điểm  $M$  nằm ngoài mặt cầu  $S(O ; r)$  có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đó. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ  $M$  đến các tiếp điểm đều bằng nhau. Tất cả các tiếp tuyến này tạo nên một mặt nón tròn xoay có đỉnh là  $M$  và có đường tròn đáy nằm trên mặt cầu.

#### IV- CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Gọi  $S$  là diện tích mặt cầu bán kính  $r$ , ta có công thức :  $S = 4\pi r^2$ .

 **Chú ý.** • Ta có diện tích đường tròn lớn của mặt cầu bán kính  $r$  là  $s = \pi r^2$ . Do đó ta cần lưu ý rằng  $S = 4s = 4\pi r^2$ .

- Người ta chứng minh được công thức tính thể tích  $V$  của khối cầu bán kính  $r$  là :  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

### B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



#### Vấn đề I

Xác định tâm và bán kính của mặt cầu thoả mãn một số điều kiện cho trước

##### 1. Phương pháp giải

Muốn xác định tâm và bán kính của mặt cầu chúng ta cần dựa vào các mệnh đề sau đây :

- Tập hợp tất cả những điểm  $M$  trong không gian cách điểm  $O$  cố định một khoảng bằng  $r$  cho trước là mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $r$  ;
- Tập hợp tất cả những điểm  $M$  nhìn đoạn thẳng  $AB$  cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính  $AB$  ;
- Tập hợp tất cả những điểm  $M$  sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ  $M$  tới hai điểm  $A, B$  cố định bằng một hằng số  $k^2$  là mặt cầu có tâm là trung điểm  $O$  của đoạn  $AB$  và bán kính  $r = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$  ;

d) Mặt cầu là mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính  $AB$  của nửa đường tròn đó.

## 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu trong các trường hợp sau đây :

- Đi qua 8 đỉnh của hình lập phương ;
- Tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương ;
- Tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương.

### ***Giải***

a) Gọi  $O$  là trung điểm của đường chéo  $AC'$ . Ta có  $O$  cách đều 8 đỉnh của hình lập phương. Vậy mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình lập phương cạnh  $a$  có tâm  $O$  là trung điểm của đường chéo  $AC'$  và

có bán kính  $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (h.2.7).

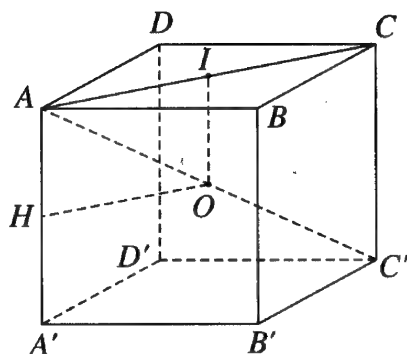
b) Gọi  $H$  là trung điểm của cạnh  $AA'$ .

Ta có  $OH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Vậy mặt

cầu tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương là mặt cầu có tâm  $O$  là trung điểm của đường chéo  $AC'$  và bán kính

$$r' = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Gọi  $I$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Ta có  $OI = \frac{a}{2}$ . Vậy mặt cầu tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương là mặt cầu có tâm  $O$  là trung điểm của đường chéo  $AC'$  và có bán kính  $r''$  bằng khoảng cách từ  $O$  tới 6 mặt bên của hình lập phương. Ta có  $r'' = \frac{a}{2}$ .



Hình 2.7

**Ví dụ 2.** Chứng tỏ rằng có vô số mặt cầu đi qua hai điểm cố định  $A, B$  cho trước. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đó.

– Nếu  $d < r$ , mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính  $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$ . Đặc biệt nếu  $d = 0$  mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn.

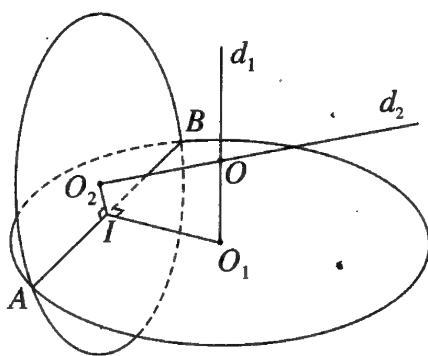
## 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung  $AB$ . Chứng minh rằng có một mặt cầu đi qua cả hai đường tròn ấy.

### *Giai*

Gọi  $O_1$  và  $O_2$  là các tâm của hai đường tròn có chung dây cung là  $AB$  và gọi  $d_1, d_2$  là các đường thẳng lần lượt qua  $O_1, O_2$  và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng chứa các đường tròn đó.

Ta biết rằng  $d_1$  chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn thứ nhất,  $d_2$  chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn thứ hai. Ta chỉ cần chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau tại một điểm  $O$  nào đó để suy ra mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $OA$  là mặt cầu đi qua cả hai đường tròn cho trước (h.2.10).



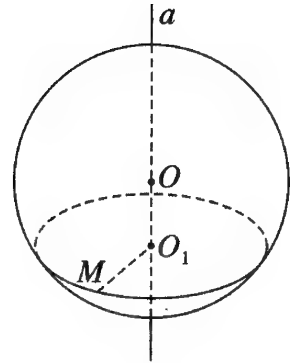
Hình 2.10

Thật vậy, gọi  $I$  là trung điểm của dây cung  $AB$  thì  $O_1I$  và  $O_2I$  đều vuông góc với  $AB$ . Vì hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng khác nhau nên ta có  $AB$  vuông góc với mặt phẳng  $(IO_1O_2)$ . Mặt khác  $d_1$  và  $d_2$  đều vuông góc với  $AB$  nên  $d_1$  và  $d_2$  đều nằm trong mặt phẳng  $(IO_1O_2)$ . Trong mặt phẳng  $(IO_1O_2)$ ,  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt vuông góc với hai đường thẳng giao nhau  $O_1I$  và  $O_2I$  nên  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau tại một điểm  $O$ . Ta có mặt cầu tâm  $O$  là mặt cầu cần tìm.

**Ví dụ 2.** Cho một đường thẳng  $a$  cố định và một điểm  $M$  cố định nằm ngoài đường thẳng  $a$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $O$  thay đổi trên đường thẳng  $a$  có một mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $r = OM$  luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

### ***Giải***

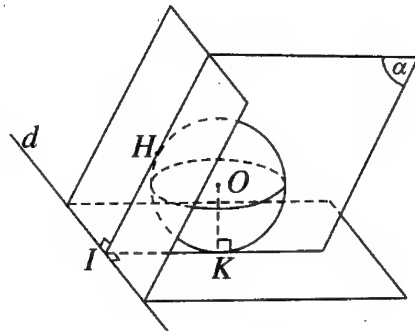
Gọi  $(\mathcal{S})$  là mặt cầu có tâm  $O$  thuộc đường thẳng cố định  $a$  và đi qua điểm  $M$  cố định không thuộc  $a$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $M$  và vuông góc với đường thẳng  $a$  tại điểm  $O_1$  thì  $O_1$  cố định và đoạn  $O_1M$  không đổi. Khi đó mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu  $(\mathcal{S})$  theo đường tròn tâm  $O_1$  bán kính  $O_1M$ . Đường tròn giao tuyến thu được là cố định vì có tâm  $O_1$  cố định, bán kính  $r_1 = O_1M$  không đổi và nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cố định. Vậy với mỗi điểm  $O$  thay đổi trên đường thẳng  $a$  cố định, có một mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $OM$  luôn luôn đi qua một đường tròn cố định nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  và vuông góc với  $a$ . Đường tròn này là giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $OM$  (h.2.11).



Hình 2.11

**Ví dụ 3.** Cho đường thẳng  $d$  không cắt mặt cầu  $S(O; r)$ .

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua tâm  $O$  của mặt cầu và vuông góc với đường thẳng  $d$ . Xác định giao tuyến của  $(\alpha)$  với mặt cầu cho trước và chứng minh rằng có hai mặt phẳng đi qua  $d$  và tiếp xúc với mặt cầu.



Hình 2.12

### ***Giải***

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua tâm  $O$  của mặt cầu và vuông góc với đường thẳng  $d$  tại  $I$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu theo đường tròn lớn tâm  $O$  có bán kính  $r$  và tất nhiên đường tròn này thuộc  $(\alpha)$  (h.2.12).

Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  gọi  $IH$  và  $IK$  là hai tiếp tuyến của đường tròn lớn đó cùng đi qua điểm  $I$ . Khi đó mặt phẳng  $(d, H)$  và mặt phẳng  $(d, K)$  là hai mặt phẳng đi qua  $d$  và tiếp xúc với mặt cầu. Thật vậy ta có  $OK \perp d$  vì  $OK$  thuộc  $(\alpha)$ , mặt khác  $OK \perp IK$ , do đó  $OK$  vuông góc với mặt phẳng  $(d, K)$  nên mặt phẳng  $(d, K)$  tiếp xúc với mặt cầu. Tương tự ta chứng minh mặt phẳng  $(d, H)$  tiếp xúc với mặt cầu. Như vậy ta có hai mặt phẳng đi qua  $d$  tiếp xúc với mặt cầu  $S(O; r)$  cho trước.



Xét vị trí tương đối của một mặt cầu và một đường thẳng

### 1. Phương pháp giải

\* Xét khoảng cách  $d$  từ tâm  $O$  của mặt cầu đến đường thẳng cho trước :

- a) Nếu  $d < r$ , đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm ;
- b) Nếu  $d = r$ , đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu ;
- c) Nếu  $d > r$  đường thẳng không cắt mặt cầu.

\* Có thể sử dụng các kiến thức về hệ thức lượng trong tam giác và hệ thức lượng trong đường tròn trong mặt phẳng để giải toán.

### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho mặt cầu  $S(O ; r)$  và một điểm  $A$  biết  $OA = 2r$ . Qua  $A$  kẻ một tiếp tuyến với mặt cầu tại  $B$  và kẻ một cát tuyến cắt mặt cầu tại  $C$  và  $D$ . Cho biết  $CD = r\sqrt{3}$ .

- a) Tính độ dài đoạn  $AB$ .
- b) Tính khoảng cách từ  $O$  đến đường thẳng  $CD$ .

### Giải

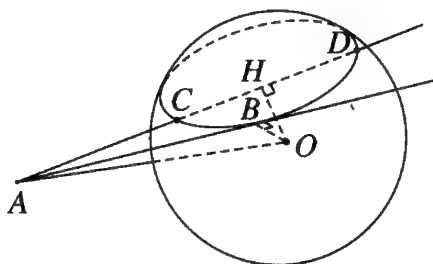
a) Ta có  $AB$  là tiếp tuyến của mặt cầu tại  $B$  nên  $AB \perp OB$  (h.2.13).

$$\text{Do đó } AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

b) Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên  $CD$ . Ta có :  $OC = OD = r$  nên tam giác  $OCD$  cân tại  $O$  và  $H$  là trung điểm của đoạn  $CD$ , nghĩa là

$HC = \frac{CD}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ . Vậy khoảng cách từ  $O$  đến  $CD$  là độ dài đoạn  $OH$  với

$$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}.$$

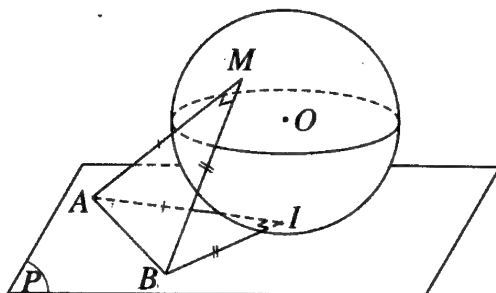


Hình 2.13

**Ví dụ 2.** Cho mặt cầu  $S(O ; r)$  tiếp xúc với mặt phẳng  $(P)$  tại  $I$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với  $I$  qua tâm  $O$ . Từ  $M$  ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu vuông góc với nhau lần lượt cắt mặt phẳng  $(P)$  tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng :  $AB^2 = AI^2 + IB^2$ .

**Giải**

Vì mặt phẳng  $(P)$  tiếp xúc với mặt cầu tại  $I$  nên  $AI$  và  $BI$  là hai tiếp tuyến của mặt cầu tại  $I$ . Mặt khác  $MA$  và  $MB$  là hai tiếp tuyến của mặt cầu tại  $M$ . Như vậy từ một điểm  $A$  ngoài mặt cầu ta có hai tiếp tuyến  $AM$  và  $AI$  nên  $AM = AI$ . Lí luận tương tự ta có  $BM = BI$ . Ta có hai tam giác  $ABM$  và  $ABI$  bằng nhau theo trường hợp (c. c. c) nên  $\widehat{AMB} = \widehat{AIB} = 90^\circ$  (h.2.14).

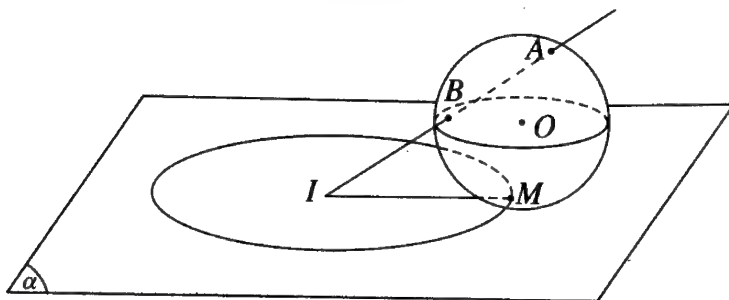


Hình 2.14

Do đó  $AB^2 = AI^2 + IB^2$  (định lí Py-ta-go).

**Ví dụ 3.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  và hai điểm  $A, B$  nằm về một phía của  $(\alpha)$  sao cho đường thẳng  $AB$  cắt  $(\alpha)$  tại  $I$ . Tìm tập hợp các tiếp điểm của mặt cầu đi qua  $A, B$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

**Giải**



Hình 2.15

Giả sử mặt cầu tâm  $O$  đi qua  $A, B$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha)$  tại  $M$ . Mặt phẳng  $(ABM)$  cắt mặt cầu đó theo đường tròn đi qua  $A, B$  và tiếp xúc với đường thẳng  $IM$  tại  $M$  (h.2.15).

Do đó điểm  $M$  nằm trên đường tròn tâm  $I$  bán kính  $r' = \sqrt{IA \cdot IB}$  và đường tròn này nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Ngược lại, lấy điểm  $M$  bất kì nằm trên đường tròn đó. Ta gọi  $O$  là giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  tại  $M$  và mặt phẳng trung trực của đoạn  $AB$ . Do đó mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $OM$  đi qua  $B$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(\alpha)$  tại  $M$ . Vì  $IA \cdot IB = IM^2$  nên mặt cầu đó cũng đi qua  $A$ .



## VẤN ĐỀ 4

Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và hình lăng trụ

### 1. Phương pháp giải

Muốn chứng minh mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp hoặc một hình lăng trụ ta cần chứng minh mặt cầu đó đi qua tất cả các đỉnh của hình chóp hoặc của hình lăng trụ. Sau đó cần xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp. Chú ý rằng điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp; điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là hình lăng trụ đó phải là một hình lăng trụ đứng và có đáy là một đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

### 2. Ví dụ

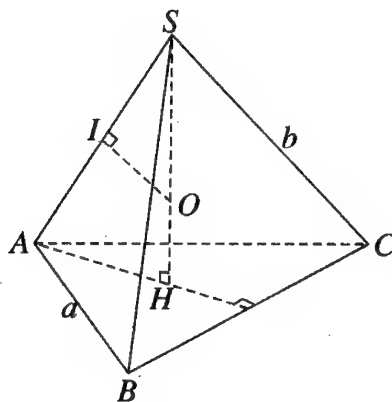
**Ví dụ 1.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$  và mỗi cạnh bên đều bằng  $b$ . Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

#### Giải

Vì  $S.ABC$  là hình chóp đều nên tâm  $O$  của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó nằm trên đường cao  $SH$  trong đó  $H$  là trọng tâm của tam giác đều  $ABC$  (h.2.16).

Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $SA$ . Ta có  $OI \perp SA$ . Khi đó hai tam giác vuông  $SIO$  và  $SHA$  đồng dạng. Từ đó ta suy ra :

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} = \frac{SA}{2SH}.$$



Hình 2.16



$$\text{Do đó } SO = \frac{SA^2}{2SH} = r.$$

$$\text{Mà } SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3.2}\right)^2 \text{ nên } SH = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{b^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

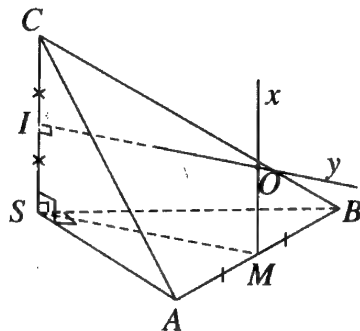
**Ví dụ 2.** Ba đoạn thẳng  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc với nhau tạo thành một tứ diện  $SABC$  với  $SA = a, SB = b, SC = c$ . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

**Giải**

*Cách 1.* Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Ta có  $M$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông  $SAB$ . Từ  $M$  kẻ  $Mx \parallel SC$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn  $SC$  cắt  $Mx$  tại  $O$ .

Ta có  $OA = OB = OC = OS$ .

Như vậy  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $SABC$  (h.2.17).



Hình 2.17

$$\text{Ta có } r^2 = OS^2 = SM^2 + MO^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{SC^2}{4} = \frac{1}{4}(SA^2 + SB^2 + SC^2)$$

(vì  $AB^2 = SA^2 + SB^2$ ).

$$\text{Vậy } r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

*Cách 2.* Từ ba cạnh  $SA, SB, SC$  ta dựng được hình hộp chữ nhật nhận  $SA, SB, SC$  là ba cạnh xuất phát từ đỉnh  $S$ . Khi đó tâm của hình hộp chữ nhật là tâm của mặt cầu phải tìm và bán kính mặt cầu bằng  $\frac{1}{2}$  đường chéo hình hộp chữ nhật

$$\text{đó. Ta suy ra } r = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**Ví dụ 3.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có 9 cạnh đều bằng  $a$ . Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp đó và tính thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu ngoại tiếp đó.

**Giải**

Gọi  $I$  và  $I'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác đáy lăng trụ (h.2.18). Như vậy  $I$  và  $I'$  đồng thời cũng là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ấy và nằm trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với đường thẳng  $II'$ . Ta suy ra trung điểm  $O$  của đoạn  $II'$  chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp đi qua 6 đỉnh của lăng trụ đã cho.

Mặt cầu này có bán kính  $r = OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$ .

$$\text{Ta có : } OA^2 = AI^2 + IO^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

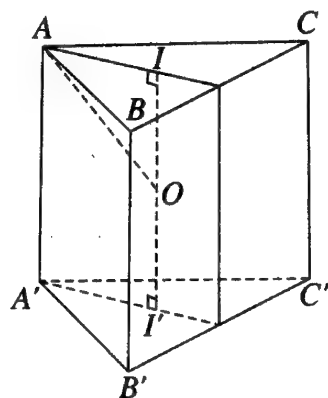
$$\text{Vậy } r = OA = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Từ đó ta tính được diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là :

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \left( \frac{a\sqrt{21}}{6} \right)^2 = \frac{7\pi a^2}{3}.$$

Gọi  $V$  là thể tích khối cầu.

$$\text{Ta có : } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left( \frac{a\sqrt{21}}{6} \right)^3. \text{ Vậy : } V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$$



Hình 2.18

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**2.13.** Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Trên đường thẳng  $Ax$  vuông góc với  $(\alpha)$  ta lấy một điểm  $S$  tùy ý, dựng mặt phẳng  $(\beta)$  đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $SC$ . Mặt phẳng  $(\beta)$  cắt  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $B', C', D'$ .

a) Chứng minh rằng các điểm  $A, B, C, D, B', C', D'$  luôn luôn thuộc một mặt cầu cố định.

b) Tính diện tích của mặt cầu đó và tính thể tích khối cầu được tạo thành.

**2.14.** Hình chóp tam giác  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = a$  và có chiều cao bằng  $h$ . Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích của mặt cầu đó.

**2.15.** Cho hai đường thẳng chéo nhau  $\Delta$  và  $\Delta'$  có  $AA'$  là đoạn vuông góc chung, trong đó  $A \in \Delta$  và  $A' \in \Delta'$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $AA'$  và vuông góc với  $\Delta'$  và cho biết  $AA' = a$ . Một đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  lần lượt cắt  $\Delta$  và  $\Delta'$  tại  $M$  và  $M'$ . Hình chiếu vuông góc của  $M$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$  là  $M_1$ .

a) Xác định tâm  $O$  và bán kính  $r$  của mặt cầu đi qua 5 điểm  $A, A', M, M', M_1$ .

Tính diện tích của mặt cầu tâm  $O$  nói trên theo  $a, x = AM'$  và góc  $\varphi = (\Delta, \Delta')$ .

b) Chứng minh rằng khi  $x$  thay đổi mặt cầu tâm  $O$  luôn luôn chứa một đường tròn cố định.

**2.16.** Cho tứ diện  $SABC$  có cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có  $SA = a, AB = b, AC = c$ . Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau :

a)  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  ;

b)  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và  $b = c$  ;

c)  $\widehat{BAC} = 120^\circ$  và  $b = c$ .

**2.17.** Cho mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $r$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng cách tâm  $O$  một khoảng  $h$  ( $0 < h < r$ ) và cắt mặt cầu theo đường tròn  $(\mathcal{C})$ . Đường thẳng  $d$  đi qua một điểm  $A$  cố định trên  $(\mathcal{C})$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu tại một điểm  $B$ . Gọi  $CD$  là một đường kính di động của  $(\mathcal{C})$ .

a) Chứng minh các tổng  $AD^2 + BC^2$  và  $AC^2 + BD^2$  có giá trị không đổi.

b) Với vị trí nào của  $CD$  thì diện tích tam giác  $BCD$  lớn nhất ?

c) Tìm tập hợp các điểm  $H$ , hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $CD$  khi  $CD$  chuyển động trên đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

**2.18.** Hình chóp  $S.ABC$  là hình chóp tam giác đều, có cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên bằng  $a\sqrt{2}$ . Một mặt cầu đi qua đỉnh  $A$  và tiếp xúc với hai cạnh  $SB, SC$  tại trung điểm của mỗi cạnh.

a) Chứng minh rằng mặt cầu đó đi qua trung điểm của  $AB$  và  $AC$ .

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng  $SA$  là  $D$ . Tính độ dài của  $AD$  và  $SD$ .

- 2.19. Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì hình tứ diện đó có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau.
- 2.20. Hình tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và có đường cao  $AH$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AH$ . Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OBCD$ .
- 2.21. Hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA = a$  là chiều cao của hình chóp và đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  có  $AB = BC = a$  và  $AD = 2a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.CDE$ .
- 2.22. Cho hình cầu tâm  $O$  bán kính  $r$ . Lấy một điểm  $A$  trên mặt cầu và gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  sao cho góc giữa  $OA$  và  $(\alpha)$  bằng  $30^\circ$ .
- Tính diện tích của thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và hình cầu.
  - Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu tại  $B$ . Tính độ dài đoạn  $AB$ .
- 2.23 Cho hình cầu đường kính  $AA' = 2r$ . Gọi  $H$  là một điểm trên đoạn  $AA'$  sao cho  $AH = \frac{4r}{3}$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $H$  và vuông góc với  $AA'$  cắt hình cầu theo đường tròn  $(\mathcal{C})$ .
- Tính diện tích của hình tròn  $(\mathcal{C})$ .
  - Gọi  $BCD$  là tam giác đều nội tiếp trong  $(\mathcal{C})$ , hãy tính thể tích hình chóp  $A.BCD$  và hình chóp  $A'.BCD$ .

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

- 2.24. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AD \perp (ABC)$  và  $BD \perp BC$ . Khi quay tất cả các cạnh của tứ diện đó quanh cạnh  $AB$  có những hình nón nào được tạo thành? Hãy kể tên các hình nón đó.
- 2.25. Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$  và có đường cao  $h$ .
- Một hình trụ có các đường tròn đáy tiếp xúc với các cạnh của tam giác đáy được gọi là hình trụ nội tiếp trong lăng trụ. Hãy tính diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp đó.
  - Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Đường thẳng  $A'I$  cắt hình trụ nội tiếp nói trên theo một đoạn thẳng. Tính độ dài đoạn thẳng đó.

- 2.26.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ .
- Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn hai đáy ngoại tiếp các hình vuông  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ .
  - Tính diện tích mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lập phương.
  - Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay nhận đường thẳng  $AC'$  làm trục và sinh ra bởi cạnh  $AB$ .
- 2.27.** Cho hình chóp  $S.ABC$  và biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh bên của hình chóp đồng thời tiếp xúc với ba cạnh của đáy tại trung điểm của mỗi cạnh đáy. Chứng minh hình chóp đó là hình chóp đều.
- 2.28.** Hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng  $r$ , có chiều cao bằng  $2r$  và có trục là  $OO'$ .
- Chứng minh rằng mặt cầu đường kính  $OO'$  tiếp xúc với hai mặt đáy của hình trụ và tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt trụ.
  - Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục  $OO'$  và cách trục một khoảng bằng  $\frac{r}{2}$ . Tính diện tích thiết diện thu được.
  - Thiết diện nói trên cắt mặt cầu đường kính  $OO'$  theo thiết diện là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.
- 2.29.** Trong mặt phẳng  $(\alpha)$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có cạnh  $AC = a$  và có cạnh huyền  $BC = 2a$ . Cũng trong mặt phẳng  $(\alpha)$  đó cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  cắt cạnh  $BC$  tại  $M$ .
- Chứng minh rằng khi quay mặt phẳng  $(\alpha)$  xung quanh trục  $AB$  có một mặt nón tròn xoay và một mặt cầu được tạo thành. Hãy xác định các mặt tròn xoay đó.
  - Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt tròn xoay đó là một đường tròn. Hãy xác định bán kính của đường tròn đó.
  - So sánh diện tích toàn phần của hình nón và diện tích của mặt cầu nói trên.
- 2.30.** Cho hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$  chéo nhau nhận  $AA'$  làm đoạn vuông góc chung, trong đó  $A$  thuộc  $\Delta$  và  $A'$  thuộc  $\Delta'$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $A$  vuông góc với  $\Delta'$  và  $d$  là hình chiếu vuông góc của  $\Delta$  trên mặt phẳng  $(P)$ . Đặt  $AA' = a$ , góc nhọn giữa  $\Delta$  và  $d$  là  $\alpha$ . Mặt phẳng  $(Q)$  song song với mặt phẳng  $(P)$  cắt  $\Delta$  và  $\Delta'$  lần lượt tại  $M$  và  $M'$ . Gọi  $M_1$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên mặt phẳng  $(P)$ .
- Chứng minh 5 điểm  $A, A', M, M', M_1$  cùng nằm trên mặt cầu  $(S)$ . Xác định tâm  $O$  của  $(S)$ . Tính bán kính của  $(S)$  theo  $a, \alpha$  và khoảng cách  $x$  giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

b) Khi  $x$  thay đổi, tâm  $O$  của mặt cầu ( $S$ ) di động trên đường nào ? Chứng minh rằng khi ( $Q$ ) thay đổi mặt cầu ( $S$ ) luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

**2.31.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  có cạnh huyền  $AB = 2a$ . Trên đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và vuông góc với mặt phẳng ( $ABC$ ), lấy một điểm  $S$  khác  $A$ , ta được tứ diện  $SABC$ .

a) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $SABC$ .

b) Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $SABC$  trong trường hợp mặt phẳng ( $SBC$ ) tạo với mặt phẳng ( $ABC$ ) một góc bằng  $30^\circ$ .

**2.32.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $r'$ . Xét hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $S$  và  $A$  cố định,  $SA = h$  cho trước và có đáy  $ABCD$  là một tứ giác tùy ý nội tiếp đường tròn đã cho, trong đó các đường chéo  $AC$  và  $BD$  luôn luôn vuông góc với nhau.

a) Tính bán kính  $r$  của mặt cầu đi qua năm đỉnh của hình chóp.

b) Hỏi đáy  $ABCD$  là hình gì để thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất ?

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**2.33.** Cho hình lập phương có cạnh bằng  $a$  và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi  $S_1$  là diện tích 6 mặt của hình lập phương,  $S_2$  là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số  $\frac{S_2}{S_1}$  và chọn một trong các kết quả sau :

(A) Tỉ số đó bằng  $\frac{\pi}{6}$ ;

(C) Tỉ số đó bằng  $\frac{\pi}{2}$ ;

(B) Tỉ số đó bằng  $\frac{1}{2}$ ;

(D) Tỉ số đó bằng  $\pi$ .

**2.34.** Một hình tứ diện đều cạnh  $a$  có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón tròn xoay còn ba đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là một trong các kết quả sau :

(A)  $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$ ;

(C)  $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ ;

(B)  $\pi a^2\sqrt{2}$ ;

(D)  $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$ .

2.35. Tìm khẳng định *sai* trong các khẳng định sau đây :

- (A) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình tứ diện bất kì ;
- (B) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình lăng trụ có đáy là một tứ giác lồi ;
- (C) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình hộp chữ nhật ;
- (D) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình chóp đều.

2.36. Cho ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một mặt cầu và biết rằng  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ . Trong các khẳng định sau khẳng định nào *đúng* ?

- (A)  $AB$  là một đường kính của mặt cầu đã cho ;
- (B) Luôn luôn có một đường tròn thuộc mặt cầu ngoại tiếp tam giác  $ABC$  ;
- (C)  $ABC$  là một tam giác vuông cân tại  $C$  ;
- (D)  $AB$  là đường kính của một đường tròn lớn trên mặt cầu đã cho.

2.37. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AD \perp (ABC)$  và  $BD \perp BC$ . Khi quay tứ diện đó xung quanh trục là cạnh  $AB$ , có bao nhiêu hình nón được tạo thành ?

- (A) một ;
- (B) hai ;
- (C) ba ;
- (D) bốn.

2.38. Các hình chóp sau đây luôn có các đỉnh nằm trên một mặt cầu :

- (A) hình chóp tam giác ;
- (B) hình chóp đều ngũ giác ;
- (C) hình chóp tứ giác ;
- (D) hình chóp đều  $n$ -giác.

Trong các khẳng định nêu trên khẳng định nào *sai* ?

2.39. Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Khi quay tứ diện đó xung quanh trục là  $AB$  có bao nhiêu hình nón khác nhau được tạo thành ?

- (A) một ;
- (B) hai ;
- (C) ba ;
- (D) không có hình nón nào.

2.40. Trong một chiếc hộp hình trụ, người ta bỏ vào đáy ba quả banh tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả banh. Gọi  $S_1$  là tổng diện tích của ba quả banh,  $S_2$  là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số diện tích  $\frac{S_1}{S_2}$  là :

- (A) 1
- (B) 5
- (C) 2
- (D) Tỉ số đó là một số khác.

# HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

## §1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

2.1. a) Gọi  $r$  là bán kính của đường tròn đáy.

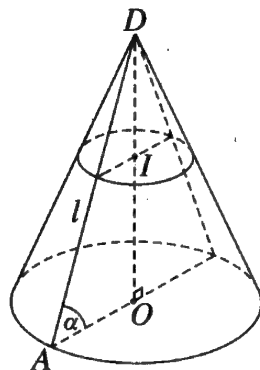
Ta có  $OA = r = l \cos \alpha$  (với  $O$  là tâm của đường tròn đáy và  $A$  là một điểm trên đường tròn đó) (h.2.19).

Ta suy ra :  $S_{xq} = \pi r l = \pi l^2 \cos \alpha$ .

Khối nón có chiều cao  $h = DO = l \sin \alpha$ . Do đó thể tích  $V$  của khối nón được tính theo công thức

$$V = \frac{1}{3} B h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

$$\text{Vậy : } V = \frac{1}{3} \pi l^2 \cos^2 \alpha \cdot l \sin \alpha = \frac{1}{3} \pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$



Hình 2.19

b) Thiết diện qua  $I$  và vuông góc với trục hình nón là một hình tròn bán kính  $r'$  với  $\frac{r'}{r} = \frac{DI}{DO} = k$ .

Gọi  $s$  là diện tích của thiết diện và  $S$  là diện tích của đáy hình nón ta có :  $\frac{s}{S} = k^2 \Leftrightarrow s = k^2 S$ , trong đó

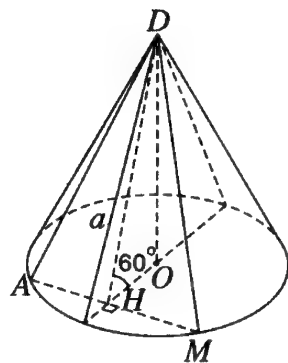
$$S = \pi r^2 = \pi l^2 \cos^2 \alpha.$$

Vậy diện tích của thiết diện đi qua điểm  $I$  và vuông góc với trục hình nón là :  $s = k^2 S = k^2 \pi l^2 \cos^2 \alpha$ .

2.2. a) Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân cạnh  $a$  nên hình nón có đường sinh  $l = a$ , có bán

kính đáy  $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , và có chiều cao  $h = r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

(h.2.20).



Hình 2.20

Gọi  $S_{xq}$  là diện tích xung quanh của hình nón, ta có :  $S_{xq} = \pi r l = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$ .

Gọi  $S$  là diện tích đáy của hình nón, ta có  $S = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{2}$ .

Vậy diện tích toàn phần của hình nón đã cho là :  $S_{xq} + S = \frac{1}{2} \pi a^2 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \pi a^2 = \frac{1}{2} \pi a^2 (\sqrt{2} + 1)$ .

Hình nón có thể tích là :  $V = \frac{1}{3} B h = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{12} \pi a^3 \sqrt{2}$ .



b) Xét mặt phẳng (DAM) đi qua đỉnh D tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ , cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và M. Từ tâm O của đường tròn đáy ta vẽ  $OH \perp AM$ , do vậy H là trung điểm của đoạn AM. Ta có  $AM \perp (DOH)$  vì  $AM \perp OH$  và  $AM \perp DO$ .

$$\text{Vậy } \widehat{DHO} = 60^\circ \text{ và } \sin 60^\circ = \frac{DO}{DH} \text{ hay } DH = \frac{DO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Gọi  $S_{\Delta DAM}$  là diện tích thiết diện cần tìm, ta có :  $S_{\Delta DAM} = AH.DH$

$$\text{mà } AH^2 = DA^2 - DH^2 = a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{3}, \text{ suy ra } AH = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta DAM} = AH.DH = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

2.3. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC (h.2.21). Theo giả thiết ta có  $SA = SB = SC = a$  và  $\widehat{SIO} = \alpha$ . Đặt  $OI = r$ ,  $SO = h$ , ta có  $AO = 2r$  và

$$\begin{cases} h = r \tan \alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases} \text{ (vì } SA^2 = SO^2 + AO^2 \text{)}.$$

$$\text{Do đó } a^2 = r^2 \tan^2 \alpha + 4r^2 = r^2 (\tan^2 \alpha + 4).$$

$$\text{Vậy } r = \frac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}.$$

Hình nón nội tiếp có đường sinh là :

$$l = SI = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha \sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}.$$

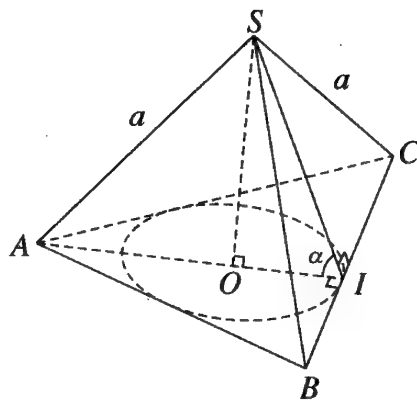
Diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp hình chóp S.ABC là :

$$S_{xq} = \pi l = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}} \cdot \frac{a}{\cos \alpha \sqrt{\tan^2 \alpha + 4}},$$

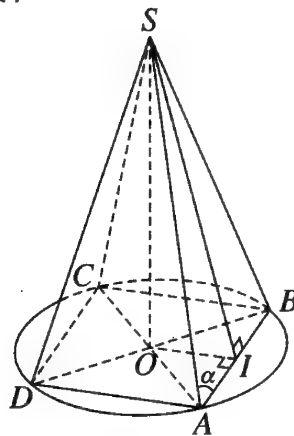
$$\text{hay } S_{xq} = \frac{\pi a^2}{\cos \alpha (\tan^2 \alpha + 4)}.$$

2.4. Gọi r là bán kính đáy của hình nón ta có  $OA = r$ ,  $SO = h$  và  $SA = SB = SC = SD = l$  là đường sinh của hình nón (h.2.22). Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có :

$$\begin{cases} SA^2 = SO^2 + OA^2 \\ AI = SA \cdot \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 = h^2 + r^2 & (1) \\ \frac{r\sqrt{2}}{2} = l \cos \alpha & (2) \end{cases}$$



Hình 2.21



Hình 2.22

$$(2) \Rightarrow r = \sqrt{2} l \cos \alpha.$$

$$(1) \Rightarrow l^2 = h^2 + 2l^2 \cos^2 \alpha \Rightarrow h^2 = l^2(1 - 2\cos^2 \alpha) \Rightarrow l^2 = \frac{h^2}{1 - 2\cos^2 \alpha}$$

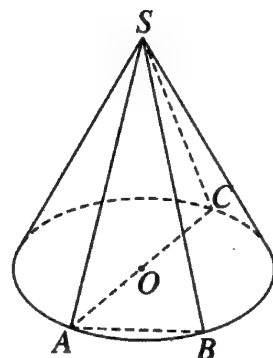
$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}}.$$

$$\text{Do đó } r = \sqrt{2} l \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} h \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}}.$$

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{\sqrt{2} h \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}} \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}} = \frac{\pi \sqrt{2} h^2 \cos \alpha}{1 - 2\cos^2 \alpha}.$$

2.5. Xét hai đường sinh  $SA, SB$  tùy ý của hình nón. Vẽ đường kính  $AC$  của đường tròn đáy. Ta có góc  $ASC$  là góc ở đỉnh của hình nón. Hai tam giác  $ASC$  và  $ASB$  có hai cặp cạnh bằng nhau vì chúng cùng là đường sinh của hình nón.

Ta có cạnh  $AC \geq AB$  nên  $\widehat{ASC} \geq \widehat{ASB}$ . Đó là điều cần chứng minh (h.2.23).



Hình 2.23

2.6. Theo giả thiết ta có góc ở đỉnh của hình nón là  $\widehat{ASB} = \alpha = 120^\circ$ . Gọi  $O$  là tâm của đường tròn đáy.

Ta có :  $\widehat{ASO} = 60^\circ$ , và  $\sin 60^\circ = \frac{OA}{SA} = \frac{r}{l}$  với  $l$  là

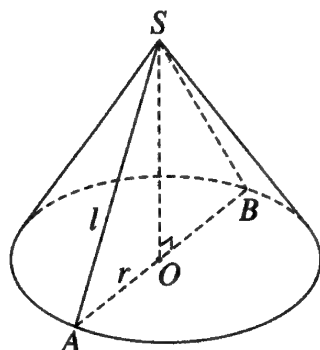
độ dài đường sinh của hình nón.

$$\text{Vậy } l = \frac{r}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}}.$$

Khi có hai đường sinh vuông góc với nhau ta có tam giác vuông có diện tích là  $\frac{1}{2} l^2$ . Do đó diện

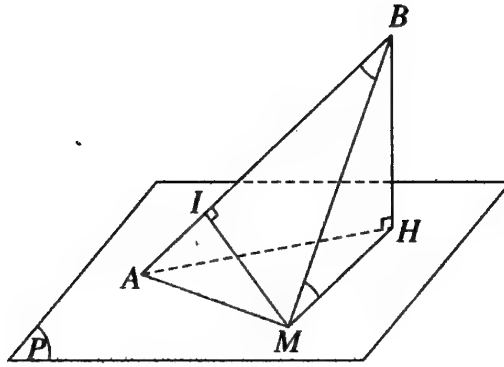
$$\text{tích của thiết diện là : } S = \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{24^2}{3} = 96 (\text{cm}^2)$$

(h.2.24).



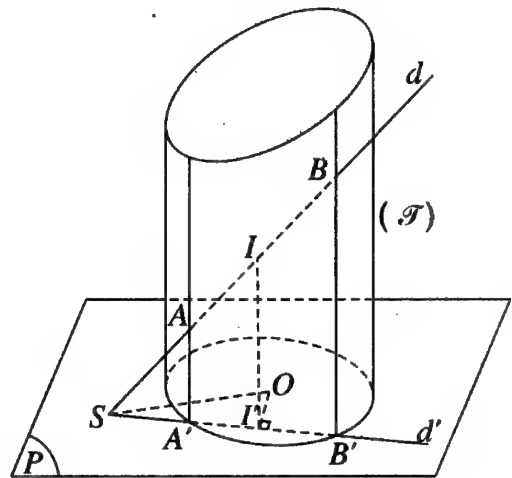
Hình 2.24

2.7. Giả sử ta có điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(P)$  thỏa mãn các điều kiện của giả thiết đã cho. Gọi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $AB$ . Hai tam giác vuông  $BIM$  và  $MHB$  bằng nhau vì có cạnh huyền chung và một cặp góc nhọn bằng nhau. Do đó  $MI = BH$  không đổi. Vậy điểm  $M$  luôn luôn nằm trên mặt trụ trục  $AB$  và có bán kính bằng  $BH$  (h.2.25).



Hình 2.25

2.8. Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $S$  và vuông góc với trục của mặt trụ  $(\mathcal{T})$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt  $(\mathcal{T})$  theo một đường tròn tâm  $O$  (h.2.26). Ta hãy xét một vị trí của đường thẳng  $d$ . Gọi  $A, B$  là giao điểm của  $d$  với  $(\mathcal{T})$  và  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Chiếu  $A, B, I$  theo phương vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  ta được các điểm theo thứ tự là  $A', B', I'$  thẳng hàng với  $S$ , trong đó  $A', B'$  nằm trên đường tròn tâm  $O$  trong mặt phẳng  $(P)$  và  $I'$  là trung điểm của đoạn  $A'B'$ . Do đó điểm  $I'$  luôn luôn nằm trên đường kính  $SO$  trong mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $II'$  vuông góc với  $(P)$ . Ta suy ra đường thẳng  $II'$  nằm trên mặt trụ  $(\mathcal{T}')$  chứa đường tròn đường kính  $SO$  nằm trong  $(P)$  và có trục song song với trục của mặt trụ  $(\mathcal{T})$ . Tất nhiên, điểm  $I$  chỉ nằm trong phần mặt trụ  $(\mathcal{T}')$  thuộc miền trong của mặt trụ  $(\mathcal{T})$ .



Hình 2.26

2.9. a) Từ  $A$  và  $B$  dựng các đường sinh  $AA'$  và  $BB'$  ta có thiết diện qua  $AB$  và song song với trục là hình chữ nhật  $AA'BB'$ . Góc giữa  $AB$  và trục chính là góc  $\widehat{ABB'}$ . Do đó  $\widehat{ABB'} = 30^\circ$ .  
 Vậy  $AB' = BB' \tan 30^\circ = r\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = r$ .

Do đó diện tích tứ giác  $AA'BB'$  là  $S_{AA'BB'} = AB' \cdot BB' = r \cdot r\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}$ .

b) Góc giữa hai bán kính đáy  $OA$  và  $O'B$  là  $\widehat{AOB'}$  hoặc  $\widehat{A'O'B}$  (h.2.27).

Vì  $AB' = r$  nên  $\triangle AOB'$  là tam giác đều, do đó  $\widehat{AOB'} = 60^\circ$ .

c) Mặt phẳng  $(ABB')$  chứa  $AB$  và song song với trục  $OO'$  của hình trụ. Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB'$ . Ta có  $OH \perp (ABB')$ . Đường thẳng qua  $H$  song song với  $OO'$  cắt  $AB$  tại  $I$ . Dựng  $IK \parallel HO$  cắt  $OO'$  tại  $K$ . Ta chứng minh được  $IK$  là đoạn vuông góc chung của  $AB$  và  $OO'$ .

$$\text{Ta có } IK = HO = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

2.10. a) Vì trục  $OO'$  vuông góc với các đáy nên  $OO' \perp OA$  và  $OO' \perp O'B$ . Vậy các tam giác  $AOO'$  và  $BO'O$  vuông tại  $O$  và  $O'$  (h.2.28).

Theo giả thiết ta có  $AO \perp O'B$ , mà  $AO \perp OO'$  nên  $AO \perp (OO'B)$ . Do đó  $AO \perp OB$ , nên tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ . Tương tự, ta chứng minh được tam giác  $AO'B$  vuông tại  $O'$ . Thể tích hình chóp  $OABO'$  là

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle OAO'B} \cdot AO$$

$$\text{hay } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot O'B \cdot AO = \frac{1}{6} \cdot r\sqrt{2} \cdot r^2 = \frac{\sqrt{2}}{6} r^3.$$

b) Ta có  $(\alpha)$  là  $(ABB')$ . Vì  $OO' \parallel (\alpha)$ , nên khoảng cách giữa  $OO'$  và  $(\alpha)$  bằng khoảng cách từ  $O$  đến  $(\alpha)$ . Dựng  $OH \perp AB'$  ta có  $OH \perp (\alpha)$ . Vậy khoảng cách cần tìm

$$\text{là } OH = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

c) Đường tròn tâm  $O$  có bán kính bằng  $\frac{r\sqrt{2}}{2}$  tiếp xúc

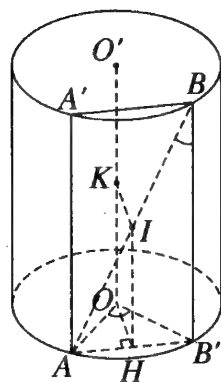
với  $AB'$  tại  $H$  là trung điểm của  $AB'$ . Do đó mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với trục  $OO'$  chứa tiếp tuyến của đường tròn đáy, nên  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt trụ dọc theo một đường sinh, với mặt trụ có trục  $OO'$  và có bán kính đáy

$$\text{bằng } \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

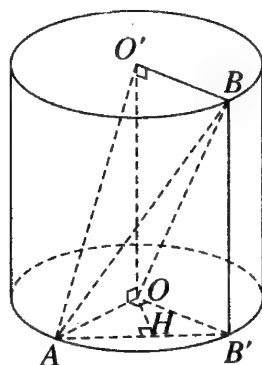
2.11. a) Ta có công thức  $S_{xq} = 2\pi rl$  với  $r = 50$  cm,  $l = 50$  cm.

$$\text{Do đó } S_{xq} = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 = \pi \cdot 5000 \text{ (cm}^2\text{)}$$

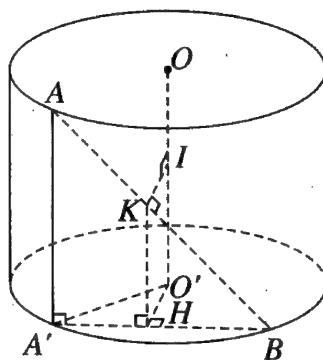
$$\text{và } V = \pi r^2 h = 125\,000\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Hình 2.27



Hình 2.28



Hình 2.29



## §2. MẶT CẦU

2.13. a) Ta có  $\left. \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'.$

Ta lại có  $AB' \perp SC$  nên suy ra  $AB' \perp (SBC).$

Do đó  $AB' \perp B'C.$

Chứng minh tương tự ta có  $AD' \perp D'C$  (h.2.31).

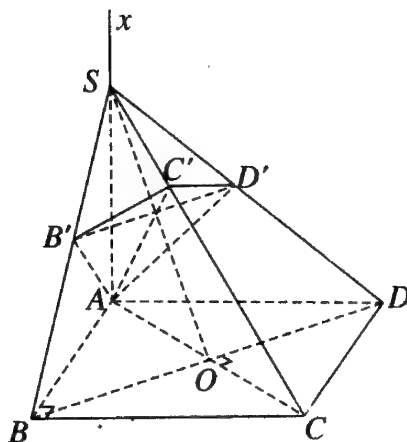
$$\begin{aligned} \text{Vậy } \widehat{ABC} &= \widehat{AB'C} = \widehat{AC'C} \\ &= \widehat{AD'C} = \widehat{ADC} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra 7 điểm  $A, B, C, D, B', C', D'$  cùng nằm trên mặt cầu đường kính là  $AC.$

b) Gọi  $r$  là bán kính mặt cầu, ta có  $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$$\text{Vậy } S = 4\pi r^2 = 4\pi \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2$$

$$\text{và } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{1}{3}\pi a^3 \sqrt{2}.$$



Hình 2.31

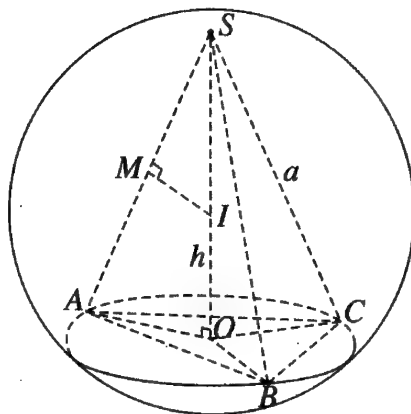
2.14. Giả sử ta có mặt cầu tâm  $I$  đi qua các đỉnh  $S, A, B, C$  của hình chóp. Mặt phẳng  $(ABC)$  cắt mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo giao tuyến là đường tròn tâm  $O$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Vì  $SA = SB = SC$  nên ta có  $SO \perp (ABC)$  và  $OS$  là trục của đường tròn tâm  $O$ . Do đó  $SO \perp AO$ . Trong tam giác  $SAO$ , đường trung trực của đoạn  $SA$  cắt  $SO$  tại  $I$  và ta được hai tam giác vuông đồng dạng là  $SIM$  và  $SAO$ , với  $M$  là trung điểm của cạnh  $SA$  (h.2.32).

$$\text{Ta có } \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} = \frac{SA}{2SO} \text{ với } SI = IA = IB = IC = r.$$

$$\text{Vậy } r = SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{a^2}{2h}.$$

Do đó diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  đã cho là :

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \left( \frac{a^2}{2h} \right)^2 = \pi \frac{a^4}{h^2}.$$



Hình 2.32

2.15. a) Theo giả thiết ta có :

$$\widehat{A'M'M} = \widehat{A'AM} = \widehat{A'M_1M} = 90^\circ \quad (\text{h.2.33}).$$

Do đó 5 điểm  $A, A', M, M', M_1$  cùng thuộc mặt cầu  $(S)$  tâm  $O$ , với  $O$  là trung điểm của  $A'M$  và có bán kính  $r = \frac{A'M}{2}$ .

Mặt khác ta có  $A'M^2 = A'A^2 + AM^2$ ,

$$\text{trong đó } \cos \varphi = \frac{MM_1}{AM},$$

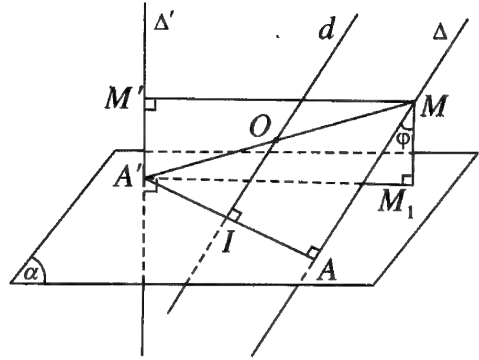
$$\text{nên } AM = \frac{MM_1}{\cos \varphi} = \frac{x}{\cos \varphi}.$$

$$\text{Do đó } A'M^2 = a^2 + \frac{x^2}{\cos^2 \varphi}, \text{ suy ra } A'M = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \varphi + x^2}{\cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + x^2}$$

$$\text{Mặt cầu tâm } O \text{ có bán kính } r = \frac{A'M}{2} = \frac{1}{2 \cos \varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + x^2}.$$

$$\text{Diện tích của mặt cầu tâm } O : S = 4\pi r^2 = \pi(2r)^2 = \pi(A'M^2) = \pi \left( a^2 + \frac{x^2}{\cos^2 \varphi} \right).$$

b) Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AA'$ . Ta có  $IO \parallel \Delta$  nên tâm  $O$  di động trên đường thẳng  $d$  cố định đi qua  $I$  và song song với  $\Delta$ . Mặt cầu tâm  $O$  đi qua hai điểm cố định  $A, A'$ , có tâm di động trên đường trung trực  $d$  cố định của đoạn  $AA'$ . Vậy mặt cầu tâm  $O$  luôn luôn chứa đường tròn cố định tâm  $I$  có đường kính  $AA'$  nằm trong mặt phẳng chứa  $AA'$  và vuông góc với  $d$ .



Hình 2.33

2.16. a)  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , ta có  $MA = MB = MC$ . Dựng đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $M$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn  $SA$  cắt  $d$  tại  $O$ .

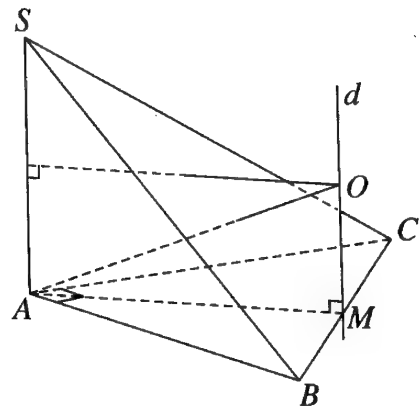
Ta có  $OS = OA = OB = OC$

$$\text{và } r^2 = OA^2 = OM^2 + MA^2.$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Do đó ta có hình cầu tâm  $O$  ngoại tiếp tứ

$$\text{diện và có } r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{h.2.34}).$$



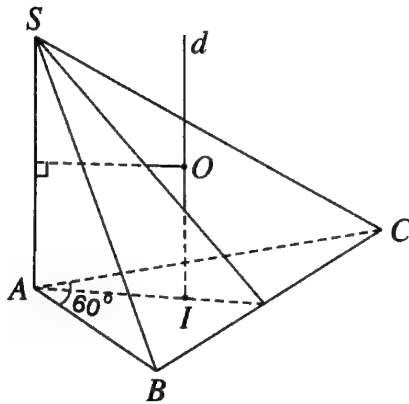
Hình 2.34

b)  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và  $b = c$ , khi đó  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $b$ . Gọi  $I$  là trọng tâm của tam giác đều nên  $I$  đồng thời cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$ . Dựng  $d$  là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $I$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn  $SA$  cắt  $d$  tại  $O$ .

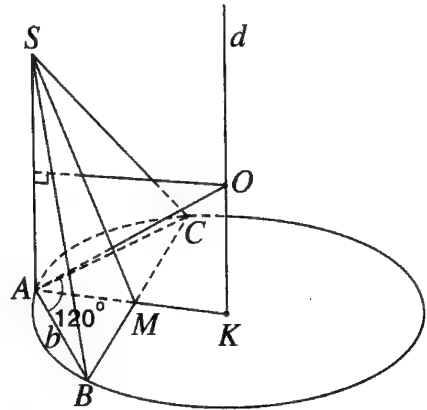
Ta có  $OS = OA = OB = OC$  và  $r^2 = OA^2 = OI^2 + IA^2$ .

Do đó ta có hình cầu tâm  $O$  ngoại tiếp tứ diện và có

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}. \text{ Vậy } r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}} \quad (\text{h.2.35}).$$



Hình 2.35



Hình 2.36

c)  $\widehat{BAC} = 120^\circ$  và  $b = c$ , khi đó  $ABC$  là một tam giác cân có góc  $A$  ở đỉnh bằng  $120^\circ$  và cạnh bên bằng  $b$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Kéo dài  $AM$  một đoạn  $MK = AM$ , ta có  $KA = KB = KC = AB = AC = b$ .

Dựng đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $K$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn  $SA$  cắt  $d$  tại  $O$ .

Ta có :  $OS = OA = OB = OC$  và  $r^2 = OA^2 = OK^2 + KA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ .

Do đó ta có mặt cầu tâm  $O$  ngoại tiếp tứ diện và có bán kính  $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \quad (\text{h.2.36}).$

2.17. a) Tam giác  $ADC$  vuông tại  $A$  nên  $AD^2 = DC^2 - AC^2$  (1)

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $BC^2 = AC^2 + AB^2$  (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra  $AD^2 + BC^2 = DC^2 + AB^2 = 4r^2 + AB^2$  (3)

Mặt khác ta lại có  $AC^2 = DC^2 - AD^2$  (4)

và  $BD^2 = AD^2 + AB^2$  (5)



Từ (4) và (5) ta có :

$$AC^2 + BD^2 = DC^2 + AB^2 = 4r^2 + AB^2 \quad (6)$$

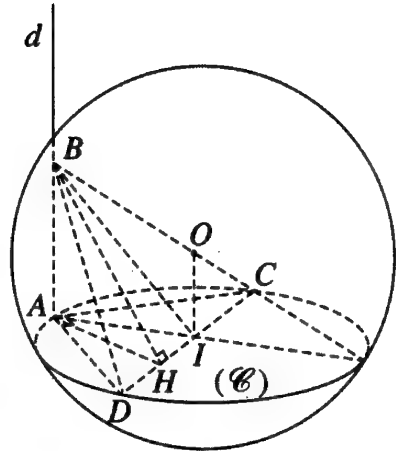
Từ (3) và (6) ta có :

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 \text{ (không đổi)}$$

(vì  $4r^2 + AB^2$  không đổi).

b) Diện tích tam giác  $BCD$  bằng  $\frac{1}{2}$  đường cao  $BH$  nhân với đường kính  $DC$ . Diện tích này lớn nhất khi  $BI$  là đường cao và khi đó  $AI \perp CD$  (h.2.37).

c) Ta có  $AH \perp DC$ . Do đó khi  $CD$  di động, điểm  $H$  luôn luôn nhìn đoạn  $AI$  dưới một góc vuông. Vậy tập hợp các điểm  $H$  là đường tròn đường kính  $AI$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ .



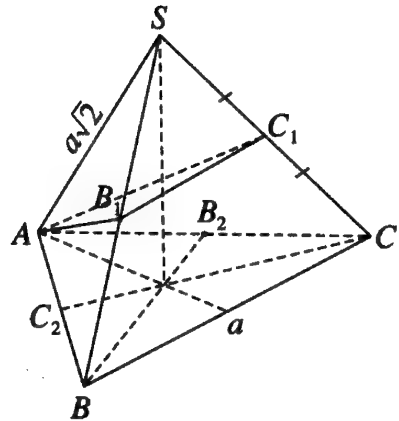
Hình 2.37

2.18. a) Giả sử mặt cầu đi qua đỉnh  $A$  của hình chóp và tiếp xúc với cạnh  $SB$  tại  $B_1$ , tiếp xúc với cạnh  $SC$  tại  $C_1$ . Khi đó mặt cầu cắt cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại các điểm  $C_2$ ,  $B_2$ . Mặt phẳng  $(SAB)$  cắt mặt cầu đó theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn này tiếp xúc với  $SB$  tại  $B_1$  và đi qua  $A$  và  $C_2$ .

Do đó ta có :  $BB_1^2 = BA \cdot BC_2$  trong đó

$$BB_1 = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Do đó } BB_1^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2}{2} = a \cdot BC_2 \Rightarrow BC_2 = \frac{a^2}{2} : a = \frac{a}{2} \text{ (h.2.38).}$$



Hình 2.38

Điều đó chứng tỏ mặt cầu nói trên đi qua trung điểm  $C_2$  của đoạn  $AB$ . Lí luận tương tự ta chứng minh được mặt cầu đó đi qua trung điểm  $B_2$  của  $AC$ .

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng  $SA$  là  $D$ , ta có :

$$SD \cdot SA = SB_1^2 \text{ hay } SD \cdot a\sqrt{2} = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Do đó } SD = \frac{a^2}{2} : a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ và } AD = SA - SD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

**2.19.** Giả sử có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh  $AB, AC, AD, BC, CD, BD$  của tứ diện  $ABCD$  lần lượt tại  $M, N, P, Q, R, S$ . Khi đó  $AM, AN, AP$  là các tiếp tuyến cùng phát xuất từ  $A$  nên  $AM = AN = AP$ .

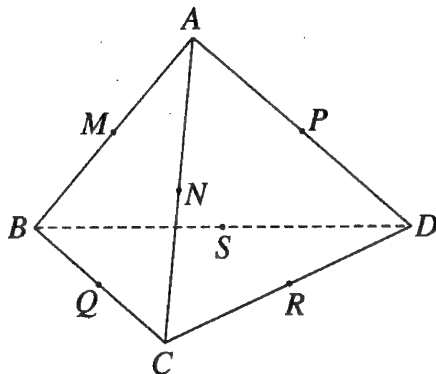
Lập luận tương tự ta cũng có :

$$BM = BQ = BS$$

$$CQ = CR = CN$$

$$DR = DS = DP.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } AB + CD &= AM + MB + CR + RD \\ &= AN + BS + CN + DS \\ &= AN + NC + BS + SD \\ &= AC + BD \end{aligned}$$



Hình 2.39

Bằng lí luận tương tự ta chứng minh được  $AB + CD = AC + BD = AD + BC$  (h.2.39).

**2.20.** Gọi  $H$  là trọng tâm của tam giác đều  $BCD$ .

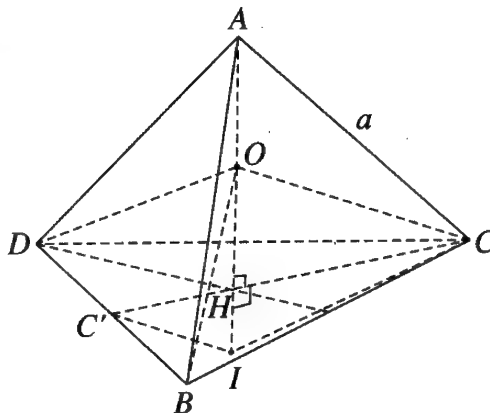
$$\text{Ta có } AH^2 = AC^2 - HC^2 = a^2 - \left( \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{2a^2}{3}. \text{ Vậy } AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ và } OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Mặt khác } OC^2 = OH^2 + HC^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2} \text{ hay } OC = OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vì  $BD = BC = CD = a$  nên các tam giác  $DOB, BOC, COD$  là những tam giác vuông cân tại  $O$ . Do đó hình chóp  $ODBC$  là hình chóp có đáy là tam giác đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp phải nằm trên  $OH$ , ngoài ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp này phải nằm trên trục của tam giác vuông  $DOB$ . Từ trung điểm  $C'$  của cạnh  $BD$  ta vẽ đường thẳng song song với  $OC$  cắt đường thẳng  $OH$  tại  $I$ . Ta có  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OBDC$ . Mặt cầu này có bán kính là  $IC$  và  $IC^2 = IH^2 + HC^2$  (h.2.40).

$$\text{Chú ý rằng } IH = \frac{1}{2} OH \text{ (vì } HC' = \frac{1}{2} HC).$$

$$\text{Do đó : } IC^2 = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3} = \frac{9a^2}{24} \text{ hay } IC = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$



Hình 2.40

**2.21.** Tam giác  $CED$  là tam giác vuông cân tại  $E$  nên trục của đường tròn đi qua ba điểm  $C, E, D$  là đường thẳng  $\Delta$  đi qua trung điểm  $I$  của đoạn  $CD$  và song song với  $SA$ .

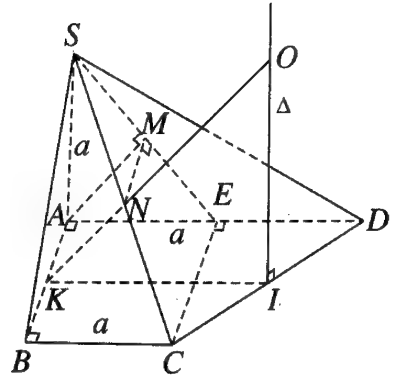
Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SE$  và  $SC$ . Ta có mặt phẳng  $(ABNM)$  là mặt phẳng trung trực của đoạn  $SE$ . Vậy tâm  $O$  của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.CDE$  chính là giao điểm của  $\Delta$  và mặt phẳng  $(ABNM)$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $AB$  thì  $KN \parallel AM$  và do đó  $KN \parallel (SAE)$ . Ta có  $IK \parallel AD$  nên  $IK \parallel (SAE)$ .

Vậy  $KN$  và  $\Delta$  đồng phẳng và ta có  $O$  là giao điểm cần tìm (h.2.41).

Chú ý rằng  $OIK$  là tam giác vuông cân, vì  $\widehat{OKI} = \widehat{MAE} = 45^\circ$ .

Ta có  $OI = IK$ , trong đó  $IK = \frac{BC + AD}{2} = \frac{a + 2a}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Vậy  $OC^2 = OI^2 + IC^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}$  (vì  $CD = a\sqrt{2}$ ,  $IC = \frac{CD}{2}$ ). Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.CDE$  là:  $r = OC = \frac{a\sqrt{11}}{2}$ .



Hình 2.41

2.22. a) Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của tâm  $O$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$ . Theo giả thiết ta có

$$\widehat{OAH} = 30^\circ. \text{ Do đó: } HA = OA \cos 30^\circ = r \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy diện tích của thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và

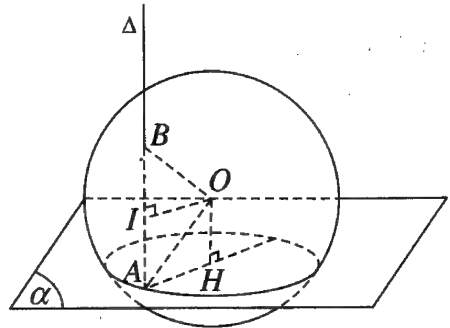
$$\text{hình cầu là: } S = \pi \cdot HA^2 = \frac{3\pi r^2}{4}.$$

b) Mặt phẳng  $(ABO)$  qua tâm  $O$  của hình cầu nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn qua  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$  ta có  $OI \perp AB$ . Vì  $AB \parallel OH$  nên  $AIOH$  là hình chữ nhật.

$$\text{Do đó } AI = OH = \frac{OA}{2} = \frac{r}{2}.$$

Vậy  $AB = 2AI = r$  (h.2.42).

Chú ý. Có thể nhận xét rằng tam giác  $OAB$  cân tại  $O$  ( $OA = OB$ ) và có góc  $\widehat{OAB} = 60^\circ$  nên  $OAB$  là tam giác đều và suy ra  $AB = OA = OB = r$ .



Hình 2.42

2.23. a) Theo giả thiết ta có  $AH = \frac{4r}{3}$  (h.2.43).

Ta suy ra  $OH = \frac{r}{3}$ . Gọi  $r'$  là bán kính của đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

Ta có :  $r'^2 = r^2 - OH^2 = r^2 - \frac{r^2}{9} = \frac{8r^2}{9}$ .

Vậy diện tích của hình tròn ( $\mathcal{C}$ ) là :

$$S = \pi r'^2 = \frac{8\pi r^2}{9}.$$

b) Vì  $BCD$  là tam giác đều nên ta có :

$$BC = r' \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r \text{ (h.2.43)}.$$

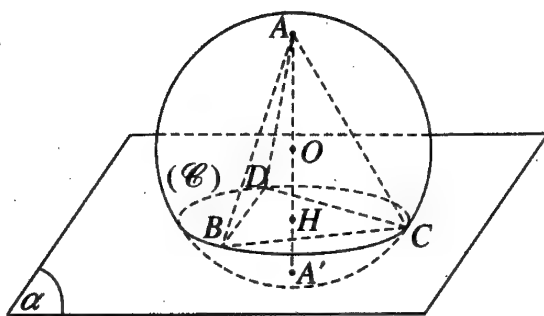
Diện tích của tam giác đều  $BCD$  là :

$$S = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{24r^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2 \sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích hình chóp  $A.BCD$  là :  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2r^2 \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4r}{3} = \frac{8\sqrt{3} r^3}{27}$ .

Hai hình chóp  $A.BCD$  và  $A'.BCD$  có chung mặt đáy  $BCD$  nên

$$\frac{V_{A'.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{HA'}{HA} = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } V_{A'.BCD} = \frac{4\sqrt{3} r^3}{27}.$$



Hình 2.43

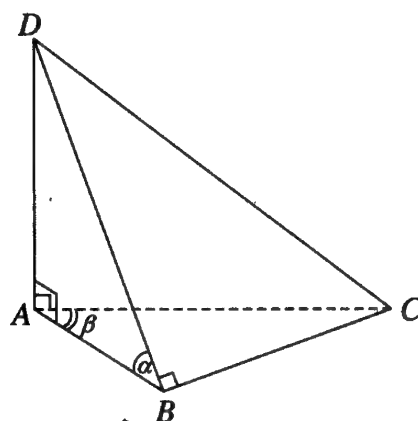
## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.24. Tứ diện  $ABCD$  có  $\widehat{BAD} = 90^\circ$  nên

$\widehat{ABD} = \alpha$  là một góc nhọn. Khi quay các cạnh của tứ diện đó xung quanh cạnh  $AB$  thì cạnh  $BD$  tạo thành một hình nón tròn xoay đỉnh  $B$  có trục là  $AB$ , cạnh  $AD$  vuông góc với  $AB$  tạo thành đáy của hình nón đó.

Mặt khác theo giả thiết ta có  $BD \perp BC$  nên  $AB \perp BC$ . Ta có  $\widehat{BAC} = \beta$  là một góc nhọn. Do đó khi quay các cạnh của tứ diện xung quanh cạnh  $AB$  thì cạnh  $AC$  tạo thành một hình nón tròn xoay đỉnh  $A$  có trục là  $AB$ , còn cạnh  $BC$  tạo thành đáy của hình nón (h.2.44).

Như vậy khi quay tất cả các cạnh của tứ diện xung quanh trục  $AB$  thì các cạnh  $BD$  và  $AC$  tạo thành hai hình nón.



Hình 2.44

**2.25. a)** Hình trụ nội tiếp trong lăng trụ có đường tròn đáy tiếp xúc tại trung điểm các cạnh của tam giác đáy. Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $r$  là bán kính đáy của hình trụ nội tiếp trong lăng trụ, ta có :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ (h.2.45).}$$

Ta có diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp lăng trụ là :

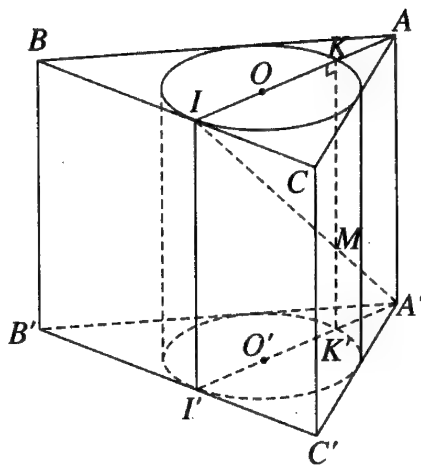
$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot h = \frac{\sqrt{3}\pi ah}{3}.$$

b) Ta có mặt phẳng  $(AA'I)$  là mặt phẳng qua trục hình trụ. Mặt phẳng này cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật  $IKKT'$ . Đoạn  $AI'$  cắt  $KK'$  tại  $M$  nên cắt hình trụ theo đoạn  $IM$ .

$$\text{Ta có : } \frac{KM}{AA'} = \frac{IK}{IA} = \frac{2}{3} \Rightarrow KM = \frac{2}{3}h.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } IKM \text{ ta có : } IM^2 = IK^2 + KM^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{4h^2}{9} = \frac{3a^2 + 4h^2}{9}.$$

$$\text{Vậy } IM = \frac{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{3}.$$



Hình 2.45

**2.26. a)** Hình trụ có chiều cao  $h = a$  và bán kính đáy  $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  (h.2.46).

$$\text{Do đó ta có : } S_{xq} = 2\pi rh = \pi a^2 \sqrt{2}.$$

b) Gọi  $I$  là tâm của hình lập phương. Tất cả các đỉnh của hình lập phương đều có khoảng

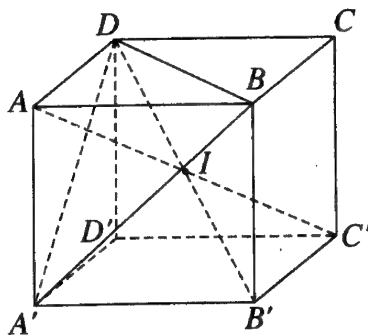
cách đến  $I$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  nên chúng nằm trên

mặt cầu tâm  $I$  bán kính  $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Ta có diện tích mặt cầu đó là  $S = 4\pi r^2 = 3\pi a^2$ .

c) Đường tròn đáy của hình nón tròn xoay đỉnh  $A$  tạo nên bởi cạnh  $AB$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $A'BD$ , tam giác này có cạnh bằng

$a\sqrt{2}$  và có đường cao bằng  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .



Hình 2.46

Do đó đường tròn đáy hình nón có bán kính  $r' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . Vậy hình nón tròn xoay này có

đường sinh  $l = a$  và có diện tích xung quanh là  $S_{xq} = \pi r' l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{3}$ .

**2.27.** Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CA$  và  $A', B', C'$  là các điểm tiếp xúc của các cạnh bên  $SA, SB, SC$  với mặt cầu. Ta có  $AA'$  và  $AM$  là hai tiếp tuyến nên  $AM = AA'$ . Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $AM = MB$ .

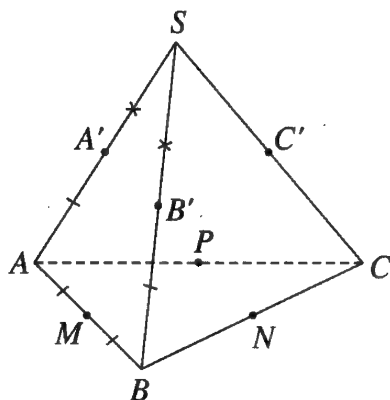
Mặt khác  $BM = BB'$ , ta suy ra  $AA' = BB'$ .

Vì  $SA' = SB'$  nên  $SA' + A'A = SB' + B'B$   
hay  $SA = SB$ .

Tương tự, ta chứng minh được  $SB = SC$ .

Do đó  $SA = SB = SC$ .

Mặt khác  $AB = 2BM = 2BN = BC = 2CN = 2CP = CA$ . Vậy  $AB = BC = CA$  và  $ABC$  là một tam giác đều. Do đó hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC$  và  $ABC$  là một tam giác đều nên là một hình chóp đều. Ta có đường cao kẻ từ  $S$  có chân  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$  (h.2.47).

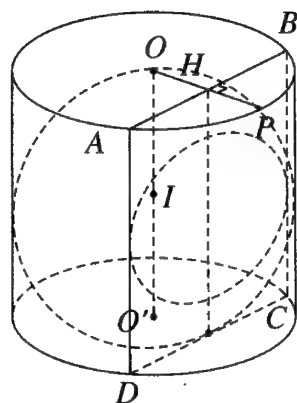


Hình 2.47

**2.28. a)** Vì các mặt đáy của hình trụ vuông góc với trục  $OO'$  tại  $O$  và  $O'$  nên chúng tiếp xúc với mặt cầu đường kính  $OO'$  (h.2.48).

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $OO'$ . Ta có  $I$  là tâm của mặt cầu. Kẻ  $IM$  vuông góc với một đường sinh nào đó ( $M$  nằm trên đường sinh) ta đều có  $IM = r$  là bán kính của mặt trụ, đồng thời điểm  $M$  cũng thuộc mặt cầu. Vậy mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt trụ.

b) Trên mặt đáy tâm  $O$  ta gọi  $H$  là trung điểm của bán kính  $OP$ . Qua  $H$  kẻ dây cung  $AB \perp OP$  và nằm trong đáy ( $O; r$ ). Các đường sinh  $AD$  và  $BC$  cùng với các dây cung  $AB$  và  $DC$  (thuộc đáy ( $O'; r$ )) xác định cho ta thiết diện cần tìm là một hình chữ nhật. Gọi  $S$  là diện tích hình chữ nhật này, ta có :  $S_{ABCD} = AB \cdot AD$  trong đó  $AD = 2r$  còn  $AB = 2AH$ . Vì  $H$  là trung điểm của  $OP$  nên ta tính được  $AB = r\sqrt{3}$ . Vậy  $S_{ABCD} = 2r^2\sqrt{3}$ .



Hình 2.48

c) Đường tròn giao tuyến của mặt cầu đường kính  $OO'$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  có bán kính bằng  $\frac{AB}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ . Đường tròn này có tâm là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$  và tiếp xúc với hai cạnh  $AD, BC$  của hình chữ nhật đó.

2.29. a) Tam giác vuông  $ABC$  có  $BC = 2a$  và  $AC = a$  nên ta suy ra  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Khi quay xung quanh trục  $AB$  cạnh  $BC$  tạo nên mặt nón tròn xoay có góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$  và có đường tròn đáy có bán kính  $AC = a$ . Khi quay xung quanh trục  $AB$  nửa đường tròn đường kính  $AB$  tạo nên mặt cầu có tâm là trung điểm  $I$  của đoạn  $AB$  và bán kính  $r = \frac{AB}{2}$  (h.2.49).

b) Khi quay xung quanh trục  $AB$ , giao điểm  $M$  của nửa đường tròn đường kính  $AB$  và cạnh  $BC$  sẽ tạo nên giao tuyến của mặt nón và mặt cầu.

Vẽ  $MH \perp AB$

$$\text{Ta có : } \frac{MH}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác ta có } CA^2 = CM \cdot CB \text{ nên ta có } CM = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}.$$

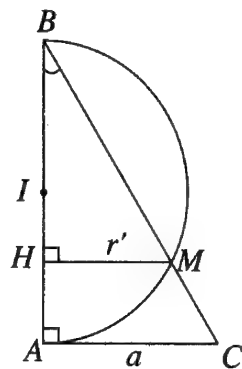
$$\text{Do đó } BM = CB - CM = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a \text{ và } MH = \frac{3}{4}a.$$

$$\text{Vậy đường tròn giao tuyến có bán kính } r' = \frac{3}{4}a.$$

c) Gọi  $S_1$  là diện tích toàn phần của hình nón và  $S_2$  là diện tích mặt cầu.

$$\text{Ta có : } S_1 = \pi r l + \pi r^2 = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

$$S_2 = 4\pi r'^2 = 4\pi (IA)^2 = 4\pi \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3\pi a^2. \text{ Vậy } S_1 = S_2.$$



Hình 2.49

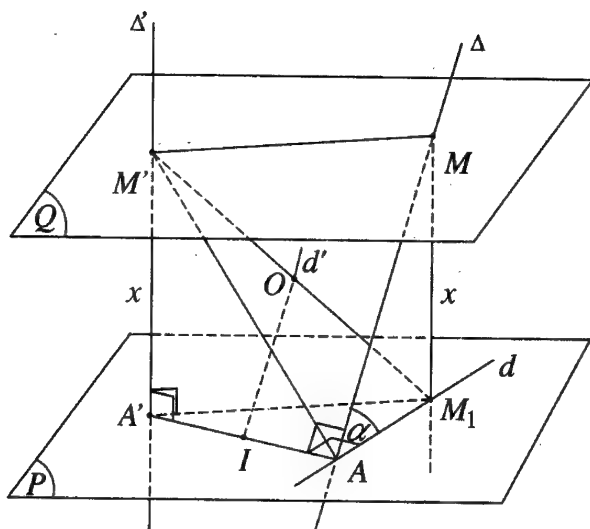
2.30. a) Vì mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  và vuông góc với  $\Delta'$  nên  $AA'$  thuộc  $(P)$ . Vì  $M$  thuộc  $\Delta$  mà  $d$  là hình chiếu vuông góc của  $\Delta$  trên  $(P)$  nên  $M_1$  thuộc  $d$ . Vì  $MA \perp AA'$  nên  $M_1A \perp AA'$  (h.2.50).

Mặt khác  $M_1A \perp M'A'$  nên ta suy ra  $M_1A \perp (AA'M')$ . Do đó  $M_1A \perp M'A$  và điểm  $A$  thuộc mặt cầu đường kính  $M'M_1$ .

Ta có  $M'A' \perp (P)$  nên  $M'A' \perp A'M_1$ , ta suy ra điểm  $A'$  cũng thuộc mặt cầu đường kính  $M'M_1$ .

Ta có  $(Q) \parallel (P)$  nên ta suy ra  $MM_1 \perp (Q)$  mà  $MM'$  thuộc  $(Q)$ , do đó  $M_1M \perp MM'$ .

Như vậy 5 điểm  $A, A', M, M', M_1$  cùng thuộc mặt cầu  $(S)$  có đường kính  $M'M_1$ . Tâm  $O$  của mặt cầu  $(S)$  là trung điểm của đoạn  $M'M_1$ .



Hình 2.50

Ta có  $M'M_1^2 = M'A'^2 + A'M_1^2 = M'A'^2 + A'A^2 + AM_1^2 = x^2 + a^2 + x^2 \cot^2 \alpha$

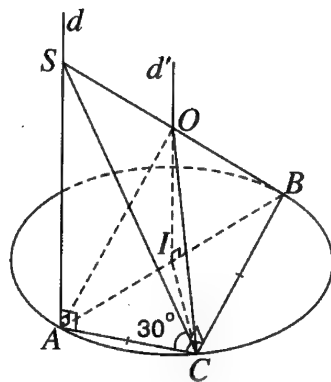
vì  $MM_1 = x$  và  $\cot \alpha = \frac{AM_1}{M_1M} = \frac{AM_1}{x}$ .

Bán kính  $r$  của mặt cầu  $(S)$  bằng  $\frac{M'M_1}{2}$  nên  $r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + x^2 (1 + \cot^2 \alpha)}$ .

b) Hình tứ giác  $A'M'MM_1$  là hình chữ nhật nên tâm  $O$  cũng là trung điểm của  $A'M$ . Do đó khi  $x$  thay đổi thì mặt phẳng  $(Q)$  thay đổi và điểm  $O$  luôn luôn thuộc đường thẳng  $d'$  đi qua trung điểm  $I$  của đoạn  $AA'$  và song song với đường thẳng  $\Delta$ . Vì mặt cầu tâm  $O$  luôn luôn đi qua hai điểm cố định  $A, A'$  nên nó có tâm  $O$  di động trên đường thẳng  $d'$ . Do đó mặt cầu tâm  $O$  luôn luôn chứa đường tròn tâm  $I$  cố định có đường kính  $AA'$  cố định và nằm trong mặt phẳng cố định vuông góc với đường thẳng  $d'$ .

**2.31.** a) Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Vì tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $C$  nên ta có  $IA = IB = IC$ . Vậy  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $SABC$  phải nằm trên đường thẳng  $d'$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  tại  $I$ . Ta suy ra  $d' \parallel d$ . Do đó  $d'$  cắt  $SB$  tại trung điểm  $O$  của đoạn  $SB$ . Ta có  $OB = OS = OA = OC$  và như vậy  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện  $SABC$  (h.2.51).

b) Trường hợp mặt phẳng  $(SBC)$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $30^\circ$  thì góc của hai mặt phẳng đó chính là góc  $\widehat{SCA}$ . Thực vậy vì  $SA \perp (ABC)$  mà  $AC \perp CB$  nên ta có  $SC \perp CB$ . Do đó  $\widehat{SCA} = 30^\circ$ .



Hình 2.51



Vì  $AB = 2a$  nên ta có  $AC = a\sqrt{2}$  ta suy ra  $SA = AC \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

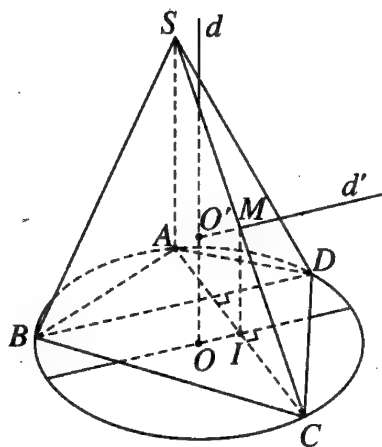
Gọi  $r$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện khi  $\widehat{SCA} = 30^\circ$ .

Ta có  $r = \frac{SB}{2} = OA = OB = OC = OS$ , trong đó  $SB^2 = SA^2 + AB^2$ .

Vậy  $SB^2 = \frac{6a^2}{9} + 4a^2 = \frac{42a^2}{9}$ . Do đó  $SB = \frac{a\sqrt{42}}{3}$ .

Ta suy ra  $r = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}$ .

- 2.32. a) Trong mặt phẳng chứa đường tròn tâm  $O$  ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$  ta kẻ đường kính qua  $O$  vuông góc với dây cung  $AC$  tại  $I$ . Ta có  $IA = IC$  và  $OI \parallel BD$ . Gọi  $O'$  là tâm mặt cầu đi qua 5 đỉnh của hình chóp ta có  $O'A = O'B = O'C = O'D = O'S$ . Điểm  $O'$  phải nằm trên trục  $d$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$ . Ta có  $d \perp (ABCD)$  tại  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SC$ . Ta có  $MI \parallel SA$  nên  $MI \perp (ABCD)$  tại  $I$ . Từ  $M$  kẻ đường thẳng  $d' \parallel OI$  cắt  $d$  tại  $O'$ . Vì  $d' \perp (SAC)$  tại  $M$  nên ta có  $O'C = O'S$  và  $O'C$  là bán kính  $r$  của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  (h.2.52).



Hình 2.52

$$\begin{aligned} \text{Ta có } r = O'C &= \sqrt{OO'^2 + OC^2} = \sqrt{MI^2 + r'^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4r'^2}}{2}. \end{aligned}$$

- b) Vì  $SA$  không đổi nên ta có  $V_{SABCD}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $S_{ABCD}$  lớn nhất. Ta có  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$  trong đó  $AC$  và  $BD$  là hai dây cung vuông góc với nhau. Vậy  $AC \cdot BD$  lớn nhất khi và chỉ khi  $AC = BD = 2r'$ , nghĩa là tứ giác  $ABCD$  là một hình vuông.

## ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.33 (A)      2.35 (B)      2.37 (B)      2.39 (B)

2.34 (A)      2.36 (B)      2.38 (C)      2.40 (A)      2.41 (A)

# CHƯƠNG III

## PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

---

### §1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I- HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ ,  $z'Oz$  vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ ,  $z'Oz$ . Điểm  $O$  được gọi là gốc toạ độ. Các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.

Không gian gắn với hệ toạ độ  $Oxyz$  được gọi là không gian  $Oxyz$ .

#### II- TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

Trong không gian  $Oxyz$  cho một điểm  $M$  tùy ý.

Khi đó ta có  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  và gọi bộ ba số  $(x; y; z)$  là toạ độ của điểm  $M$  đối với hệ trục toạ độ  $Oxyz$  đã cho. Như vậy có tương ứng 1 – 1 giữa mỗi điểm  $M$  trong không gian với một bộ ba số  $(x; y; z)$  gọi là toạ độ của điểm  $M$  đối với hệ toạ độ  $Oxyz$  cho trước. Ta viết :  $M = (x; y; z)$  hoặc  $M(x; y; z)$ .

#### III- TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTO

Trong không gian  $Oxyz$  cho vectơ  $\vec{a}$  với  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ .

Khi đó bộ ba số  $(a_1; a_2; a_3)$  được gọi là toạ độ của vectơ  $\vec{a}$  đối với hệ toạ độ  $Oxyz$  cho trước. Ta viết :  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  hay  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ .


#### IV- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và một số  $k$ . Khi đó ta có :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

 **Chú ý.** a)  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$ .

b)  $\vec{0} = (0; 0; 0)$ .

c)  $\vec{a}$  và  $\vec{b} (\neq \vec{0})$  cùng phương  $\Leftrightarrow$  có một số  $k$  sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \\ b_3 = ka_3. \end{cases}$$

d) Nếu  $A = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $B = (b_1; b_2; b_3)$  thì  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$ .

#### V- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG

a) Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ .

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ .

b) Độ dài của một vectơ :

Cho vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ , ta có  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ .

c) Khoảng cách giữa hai điểm  $A = (x_A; y_A; z_A)$  và  $B = (x_B; y_B; z_B)$  là

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

d) Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ .

$$\text{Ta có : } \cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\text{và } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

## VI. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian  $Oxyz$  mặt cầu tâm  $I = (a; b; c)$  bán kính  $r$  có phương trình là :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

$$\text{hoặc } x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2.$$

Ngược lại, phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

với  $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$  là phương trình của mặt cầu tâm  $I(-A; -B; -C)$

có bán kính  $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ I

Tìm tọa độ của một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thỏa mãn một số điều kiện cho trước

#### 1. Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa có liên quan đến vectơ : tọa độ của vectơ, độ dài của vectơ, biết phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng, biết tính tổng (hiệu) của hai vectơ, biết tính các tọa độ trọng tâm của một tam giác, ...

#### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba vectơ  $\vec{a} = (5; 7; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; 4)$ ,  $\vec{c} = (-6; 1; -1)$ . Hãy tìm các vectơ sau đây :

a)  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$  ;

b)  $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$  .

**Giải**

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} 3\vec{a} = (15; 21; 6) \\ -2\vec{b} = (-6; 0; -8) \\ \vec{c} = (-6; 1; -1). \end{cases}$$

Do đó  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3; 22; -3)$ .

b) Tương tự, ta tính được  $\vec{n} = (19; 39; 30)$ .

**Ví dụ 2.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau một góc  $120^\circ$ . Tìm  $|\vec{a} + \vec{b}|$  và  $|\vec{a} - \vec{b}|$  biết  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 19. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}.$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |\vec{a} - \vec{b}| = 7.$$

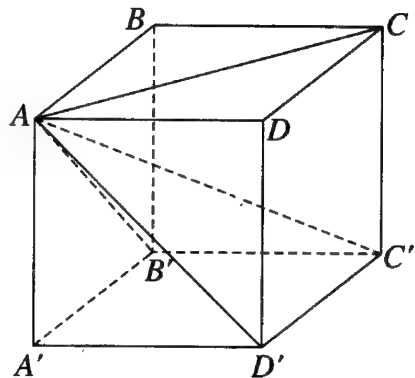
**Ví dụ 3.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .

Hãy phân tích vector  $\overrightarrow{AC'}$  theo ba vector  $\overrightarrow{AB'}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD'}$ .

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$  vì  $ACC'A'$  là hình chữ nhật (h.3.1).

Tương tự :  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$  vì  $ADC'B'$  là hình chữ nhật.



Hình 3.1

và  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB}$  vì  $ABC'D'$  là hình chữ nhật.

Do đó  $3\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC'}$ .

Ta suy ra  $2\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}$ .

Vậy  $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})$ .

**Ví dụ 4.** Trong không gian cho ba điểm  $A(1; 0; -2)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(1; -2; 2)$ .

a) Tìm độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác  $ABC$ .

c) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

**Giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-1; -3; 3)$ ,  $\overrightarrow{CA} = (0; 2; -4)$ .

Do đó  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ,

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19},$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

b) Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA$ . Ta có :

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}, \quad z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } D = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Tương tự, } E = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), F = (1; -1; 0).$$

c) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Ta có  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Giả sử  $G = (x; y; z)$ . Ta có :  $\overrightarrow{GA} = (1 - x; -y; -2 - z)$

$$\overrightarrow{GB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$$

$$\overrightarrow{GC} = (1 - x; -2 - y; 2 - z).$$

Từ đó suy ra :  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (4 - 3x; -1 - 3y; -1 - 3z)$ .

Vì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  nên ta có :

$$\begin{cases} 4 - 3x = 0 \\ -1 - 3y = 0 \\ -1 - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G = \left( \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right)$$



## VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các hệ thức vectơ

### 1. Phương pháp giải

Sử dụng quy tắc ba điểm đối với phép cộng, phép trừ vectơ và các tính chất của các phép toán về vectơ để biến đổi các hệ thức vectơ.

### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $I$  là trung điểm của  $EF$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .

b) Với điểm  $M$  bất kì trong không gian, hãy chứng minh rằng :

$$4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

**Giải**

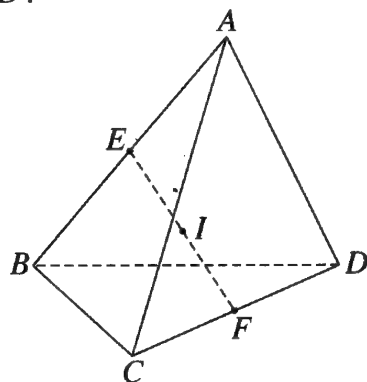
a) Ta có  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$

$$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}.$$

Do đó  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$ .

Vì  $I$  là trung điểm của  $EF$  nên  $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$ ,

suy ra  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$  (h.3.2).



Hình 3.2

b) Ta có  $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI}$$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI}$$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DI}.$$

Do đó  $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI}.$

Theo câu a) ta có  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$ . Vậy  $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Do đó  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}.$  Vì  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$  nên ta có

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

**Nhận xét.** Trên đây ta đã biến đổi vế trái thành vế phải. Mặt khác ta cũng có thể biến đổi vế phải thành vế trái bằng phương pháp tương tự.

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  với  $I$  là trọng tâm của tam giác đáy  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA}$

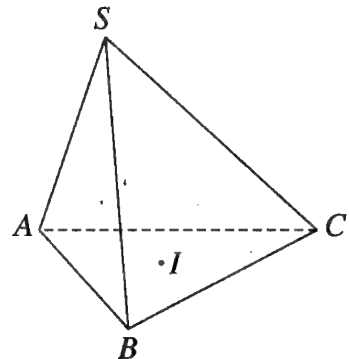
$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}.$$

Do đó  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}.$

Vì  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$  (h.3.3).

Vậy  $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$



Hình 3.3





Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

### 1. Phương pháp giải

- Sử dụng định nghĩa tích vô hướng và biểu thức toạ độ của tích vô hướng.
- Sử dụng các công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vector.

### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1 ; -2 ; 3)$ ,  $B(0 ; 3 ; 1)$ ,  $C(4 ; 2 ; 2)$ .

- Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;
- Tìm cosin của góc  $\widehat{BAC}$  .

**Giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1 ; 5 ; -2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (5 ; 4 ; -1)$ .

Do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1.5 + 5.4 + (-2).(-1) = 27$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \widehat{BAC} &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{27}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{27}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(2 ; 0 ; 1)$ ,  $B(-1 ; 2 ; 3)$ .

- Tính khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$ .
- Tìm cosin của các góc tạo bởi ba vector đơn vị  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  trên ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  và vector  $\overrightarrow{AB}$  .

**Giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-3 ; 2 ; 2)$  và  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$ .

b) Các vector  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  có toạ độ là :  $\vec{i} = (1 ; 0 ; 0)$ ,  $\vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$ ,  $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$ .

$$\text{Do đó : } \cos(\vec{i}, \vec{AB}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{AB}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{-3}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{AB}) = \frac{\vec{j} \cdot \vec{AB}}{|\vec{j}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{AB}) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{AB}}{|\vec{k}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

**Ví dụ 3.** Hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = a$ ,  $SB = b$ ,  $SC = c$

và có :  $\widehat{ASB} = \alpha$ ,  $\widehat{BSC} = \beta$ ,  $\widehat{CSA} = \gamma$ .

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

Hãy tính khoảng cách  $SG$ .

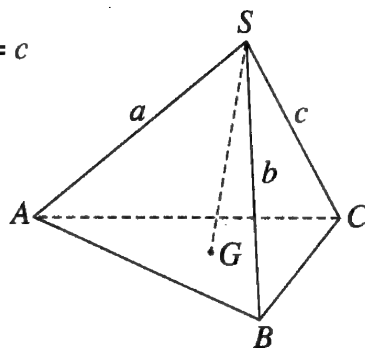
**Giải**

Theo Ví dụ 3 (Vấn đề 2) ta có :

$$\vec{SG} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}).$$

$$\begin{aligned} (\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})^2 &= \vec{SA}^2 + \vec{SB}^2 + \vec{SC}^2 + 2\vec{SA} \cdot \vec{SB} + 2\vec{SA} \cdot \vec{SC} + 2\vec{SB} \cdot \vec{SC} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \gamma + 2bc \cos \beta. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } SG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \gamma + 2bc \cos \beta} \quad (\text{h.3.4}).$$



Hình 3.4

**Ví dụ 4.** Hệ trục  $Oxyz$  có  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  lần lượt là các vector đơn vị trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Gọi  $Oa, Ob, Oc$  theo thứ tự là các tia phân giác của các góc  $\widehat{yOz}$ ,  $\widehat{zOx}$ ,  $\widehat{xOy}$  và  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  theo thứ tự là ba vector đơn vị trên ba tia phân giác ấy.

a) Hãy tính toạ độ các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

b) Tính các tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$  và từ đó suy ra góc giữa các cặp vector đó.

### Giải

a) Vì tia  $Oa$  là tia phân giác của góc  $\widehat{yOz}$  nên tia  $Oa$  tạo với hai tia  $Oy$  và  $Oz$  hai góc đều bằng  $\frac{\pi}{4}$ .

Do đó:  $\vec{a} = \cos \frac{\pi}{4} \vec{j} + \cos \frac{\pi}{4} \vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left( 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ (h.3.5).}$$

Tương tự, ta tính được :

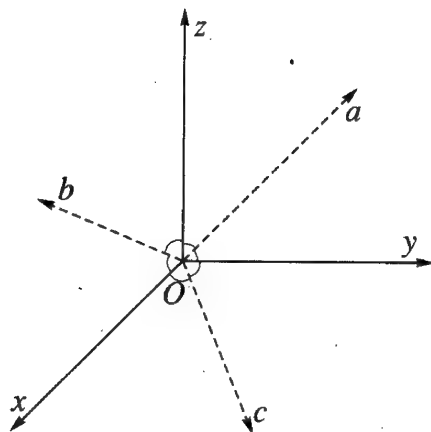
$$\vec{c} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right); \vec{b} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

b) Dùng cách tính tích vô hướng bằng biểu thức tọa độ ta có :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}.$$

Vì  $|\vec{a}| = 1$  và  $|\vec{b}| = 1$  mà  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$  nên ta suy ra  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

Tương tự, ta cũng có  $(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$ .



Hình 3.5



### Vấn đề 4

lập phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính của mặt cầu đó

#### 1. Phương pháp giải

Phương trình mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $r$  có dạng :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

#### 2. Ví dụ

Trong không gian  $Oxyz$  hãy lập phương trình mặt cầu đi qua điểm  $M(5; -2; 1)$  và có tâm  $I(3; -3; 1)$ .

### ***Giải***

Mặt cầu cần tìm có bán kính  $r = IM = |\overline{IM}|$ .

Ta có  $\overline{IM} = (2; 1; 0)$ . Do đó  $r = |\overline{IM}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ .

Vậy mặt cầu có phương trình là:  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 5$

$$\text{hay } x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 2z + 14 = 0.$$



### **VẤN ĐỀ 5**

Cho biết phương trình mặt cầu, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

#### **1. Phương pháp giải**

Biến đổi phương trình đã cho về dạng:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ .

Khi đó mặt cầu đã cho có tâm  $I = (a; b; c)$  và có bán kính bằng  $r$ .

#### **2. Ví dụ**

Cho mặt cầu có phương trình  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 3y + 15z - 2 = 0$ . Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

### ***Giải***

Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{25}{4} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{6}.$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm  $I = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$  và bán kính  $r = \frac{7\sqrt{6}}{6}$ .

### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

- 3.1.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba vectơ  $\vec{a} = (2; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{c} = (-4; 1; -1)$ . Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{m}$  và  $\vec{n}$  biết rằng :
- a)  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$  ;                      b)  $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$  .
- 3.2** Trong không gian  $Oxyz$  cho vectơ  $\vec{a} = (1; -3; 4)$ .
- a) Tìm  $y_0$  và  $z_0$  để cho vectơ  $\vec{b} = (2; y_0; z_0)$  cùng phương với  $\vec{a}$  .
- b) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{c}$  biết rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng và  $|\vec{c}| = 2|\vec{a}|$  .
- 3.3.** Trong không gian  $Oxyz$  cho điểm  $M$  có tọa độ  $(x_0; y_0; z_0)$ . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  trên các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$ .
- 3.4.** Cho hai bộ ba điểm :
- a)  $A = (1; 3; 1)$ ,     $B = (0; 1; 2)$ ,     $C = (0; 0; 1)$  ;
- b)  $M = (1; 1; 1)$ ,     $N = (-4; 3; 1)$ ,     $P = (-9; 5; 1)$ .
- Hỏi bộ nào có ba điểm thẳng hàng ?
- 3.5.** Trong không gian  $Oxyz$ , hãy tìm trên mặt phẳng  $(Oxz)$  một điểm  $M$  cách đều ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(3; 1; -1)$ .
- 3.6.** Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng :
- a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$  ;                      b)  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$  .
- 3.7.** Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC, BD, AD, BC$ . Chứng minh rằng :
- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$  ;                      b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$  .
- 3.8.** Trong không gian cho ba vectơ tùy ý  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .
- Gọi  $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = 3\vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{w} = 2\vec{c} - 3\vec{a}$ .
- Chứng tỏ rằng ba vectơ  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  đồng phẳng.
- 3.9.** Trong không gian  $Oxyz$  cho một vectơ  $\vec{a}$  tùy ý khác vectơ  $\vec{0}$ . Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  là ba góc tạo bởi ba vectơ đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  trên ba trục  $Ox, Oy, Oz$  và vectơ  $\vec{a}$ .
- Chứng minh rằng :  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  .

**3.10.** Cho hình tứ diện  $ABCD$ .

a) Chứng minh hệ thức :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

b) Từ hệ thức trên hãy suy ra định lí : “Nếu một hình tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối diện thứ ba cũng vuông góc với nhau.”

**3.11.** Tính tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  trong không gian với các toạ độ đã cho là :

a)  $\vec{a} = (3 ; 0 ; -6)$ ,  $\vec{b} = (2 ; -4 ; c)$  ;

b)  $\vec{a} = (1 ; -5 ; 2)$ ,  $\vec{b} = (4 ; 3 ; -5)$  ;

c)  $\vec{a} = (0 ; \sqrt{2} ; \sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (1 ; \sqrt{3} ; -\sqrt{2})$ .

**3.12.** Tính khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  trong mỗi trường hợp sau :

a)  $A(4 ; -1 ; 1)$ ,  $B(2 ; 1 ; 0)$  ;

b)  $A(2 ; 3 ; 4)$ ,  $B(6 ; 0 ; 4)$ .

**3.13.** Trong không gian  $Oxyz$  cho tam giác  $ABC$  có toạ độ các đỉnh là :

$A(a ; 0 ; 0)$ ,  $B(0 ; b ; 0)$ ,  $C(0 ; 0 ; c)$ .

Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn.

**3.14.** Trong không gian  $Oxyz$  hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau :

a) Có tâm  $I(5 ; -3 ; 7)$  và có bán kính  $r = 2$  ;

b) Có tâm là điểm  $C(4 ; -4 ; 2)$  và đi qua gốc toạ độ ;

c) Đi qua điểm  $M(2 ; -1 ; -3)$  và có tâm  $C(3 ; -2 ; 1)$ .

**3.15.** Trong không gian  $Oxyz$  hãy xác định tâm và bán kính các mặt cầu có phương trình sau đây :

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 16z - 26 = 0$  ;

b)  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 12z - 100 = 0$ .

**3.16.** Trong không gian  $Oxyz$  hãy viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm  $A(1 ; 0 ; 0)$ ,  $B(0 ; -2 ; 0)$ ,  $C(0 ; 0 ; 4)$  và gốc toạ độ  $O$ . Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

## §2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I- VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

**Định nghĩa.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$ . Vector  $\vec{n}$  khác  $\vec{0}$  và có giá vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  được gọi là vectơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ .

#### II- PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1. Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  song song hoặc chứa giá của hai vectơ khác phương là  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  thì  $(\alpha)$  có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

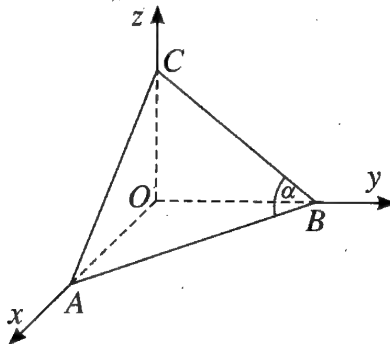
Vectơ  $\vec{n}$  được gọi là *tích có hướng* (hay *tích vector*) của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu là  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ .

2. Phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và nhận vectơ  $\vec{n}(A; B; C)$  khác  $\vec{0}$  làm vectơ pháp tuyến là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

3. Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình tổng quát là  $Ax + By + Cz + D = 0$  thì nó có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}(A; B; C)$ .

4. Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các trục toạ độ  $Ox, Oy, Oz$  theo thứ tự tại các điểm  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$  với  $abc \neq 0$  thì  $(\alpha)$  có phương trình theo đoạn chắn là  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  (h.3.6).



Hình 3.6

### III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Cho hai mặt phẳng  $(\alpha_1)$  và  $(\alpha_2)$  có phương trình tổng quát lần lượt là

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Gọi  $\vec{n}_1 (A_1; B_1; C_1)$  và  $\vec{n}_2 (A_2; B_2; C_2)$  lần lượt là vector pháp tuyến của  $(\alpha_1)$  và  $(\alpha_2)$ . Với  $k$  là số thực, ta có :

$$1. (\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

$$2. (\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

 **Chú ý :**

$$\bullet (\alpha_1) \text{ cắt } (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet (\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2. \end{cases}$$

### IV- KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Trong không gian  $Oxyz$ , khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$  được tính bởi công thức :

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$





## VẤN ĐỀ 1

# B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

### 1. Phương pháp giải

**Loại 1.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  khi đã biết vector pháp tuyến  $\vec{n} (A ; B ; C)$  và một điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  thuộc  $(\alpha)$

- Phương trình  $(\alpha)$  có dạng :  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  ;
- Khai triển, rút gọn rồi đưa về dạng tổng quát :  $Ax + By + Cz + D = 0$ , với  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ .

**Loại 2.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa ba điểm  $M, N, P$  không thẳng hàng

- Tìm vector pháp tuyến của  $(\alpha)$  :  $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}$  ;
- Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M$  và có vector pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha$  (loại 1).

**Loại 3.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và song song với mặt phẳng  $(\beta)$  :  $Ax + By + Cz + D = 0$

- Phương trình  $(\alpha)$  có dạng :  $Ax + By + Cz + D' = 0$  (1)
- Thay toạ độ  $M_0$  vào (1) ta tìm được  $D'$ .

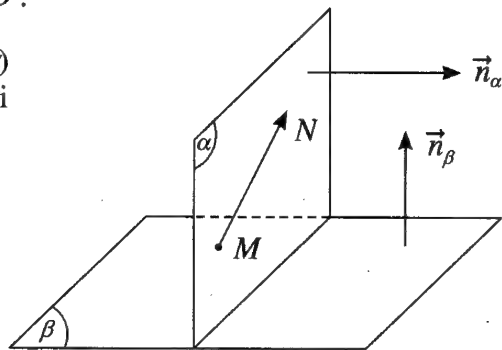
**Loại 4.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa hai điểm  $M, N$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\beta)$  :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- Tìm vector pháp tuyến của  $(\alpha)$

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{MN} \wedge \vec{n}_\beta$$

- Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M$  và có vector pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha$  (loại 1) (h.3.7).



Hình 3.7

### 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(2 ; 5 ; -7)$  và song song với giá của hai vector  $\vec{a} = (1 ; -2 ; 3)$  và  $\vec{b} = (3 ; 0 ; 5)$ .

### ***Giải***

Ta có :  $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-10 ; 4 ; 6) = -2(5 ; -2 ; -3)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (5 ; -2 ; -3)$ . Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $5(x - 2) - 2(y - 5) - 3(z + 7) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y - 3z - 21 = 0$ .

**Ví dụ 2.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $A(2 ; -1 ; 3)$ ,  $B(4 ; 0 ; 1)$ ,  $C(-10 ; 5 ; 3)$ .

### ***Giải***

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1 ; -2)$

$$\overrightarrow{AC} = (-12 ; 6 ; 0).$$

Gọi  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (12 ; 24 ; 24)$ .

Ta chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  là  $\vec{n}_\alpha = \frac{1}{12} \vec{a} = (1 ; 2 ; 2)$ .

Vậy phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  là :

$$1(x - 2) + 2(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

**Ví dụ 3.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình  $2x + 3y - 4z - 2 = 0$  và điểm  $A(0 ; 2 ; 0)$ .

- a) Viết phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  đi qua  $A$  và song song với  $(\alpha)$ .
- b) Viết phương trình mặt phẳng  $(\gamma)$  đi qua  $OA$  và vuông góc với  $(\alpha)$ .

### ***Giải***

a) Vì  $(\beta)$  song song với  $(\alpha)$  nên phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  có dạng :

$$2x + 3y - 4z + D = 0. \quad (1)$$

Điểm  $A$  thuộc  $(\beta)$  nên thay tọa độ của  $A$  vào (1) ta được

$$2.0 + 3.2 - 4.0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -6.$$

Vậy phương trình của mặt phẳng  $(\beta)$  là :  $2x + 3y - 4z - 6 = 0$ .

b) Hai vectơ có giá song song hoặc được chứa trong  $(\gamma)$  là :

$$\overrightarrow{OA} = (0 ; 2 ; 0) \text{ và } \vec{n}_\alpha = (2 ; 3 ; -4).$$

Suy ra  $(\gamma)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_\gamma = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{n}_\alpha = (-8; 0; -4)$ .

Mặt phẳng  $(\gamma)$  đi qua điểm  $O(0; 0; 0)$  và có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_\gamma = (-8; 0; -4).$$

Vậy phương trình của mặt phẳng  $(\gamma)$  là :  $-8x - 4z = 0$  hay  $2x + z = 0$ .

**V dụ 4.** Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; -2; 0)$ ,  $C(0; 0; -3)$ .

### **Giải**

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được phương trình  $(\alpha)$  có dạng :  $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-3} = 1$  hay  $6x - 3y - 2z - 6 = 0$ .



## **VẤN ĐỀ 2**

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

$$(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

### **1. Phương pháp giải**

– Xét hai vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_\alpha = (A_1; B_1; C_1)$  và  $\vec{n}_\beta = (A_2; B_2; C_2)$ .

Ta có các trường hợp sau :

\*  $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta : (\alpha)$  cắt  $(\beta)$ ;

\*  $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} : (\alpha) \parallel (\beta)$ ;

\*  $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \\ D_1 = kD_2 \end{cases} : (\alpha) \equiv (\beta)$ ;

\*  $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 : (\alpha) \perp (\beta)$ .

## 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình tổng quát sau đây :

a)  $(\alpha_1) : x + 2y + 3z + 4 = 0,$

$(\beta_1) : x + 5y - z - 9 = 0.$

b)  $(\alpha_2) : x + y + z + 5 = 0,$

$(\beta_2) : 2x + 2y + 2z + 6 = 0.$

c)  $(\alpha_3) : x + 2y + 3z + 1 = 0,$

$(\beta_3) : 3x + 6y + 9z + 3 = 0.$

### Giải

a) Gọi  $\vec{n}_{\alpha_1}$  và  $\vec{n}_{\beta_1}$  lần lượt là các vector pháp tuyến của các mặt phẳng  $(\alpha_1)$  và  $(\beta_1)$ .

Ta có :  $\vec{n}_{\alpha_1} = (1 ; 2 ; 3)$  và  $\vec{n}_{\beta_1} = (1 ; 5 ; -1)$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow \vec{n}_{\alpha_1} \neq k\vec{n}_{\beta_1}. \text{ Vậy } (\alpha_1) \text{ cắt } (\beta_1).$$

b) Gọi  $\vec{n}_{\alpha_2}$  và  $\vec{n}_{\beta_2}$  lần lượt là các vector pháp tuyến của các mặt phẳng  $(\alpha_2)$  và  $(\beta_2)$ .

Ta có :  $\vec{n}_{\alpha_2} = (1 ; 1 ; 1)$  và  $\vec{n}_{\beta_2} = (2 ; 2 ; 2)$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{\alpha_2} = \frac{1}{2}\vec{n}_{\beta_2} \\ \frac{1}{2} \neq \frac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy  $(\alpha_2) // (\beta_2)$ .

c) Gọi  $\vec{n}_{\alpha_3}$  và  $\vec{n}_{\beta_3}$  lần lượt là các vector pháp tuyến của các mặt phẳng  $(\alpha_3)$  và  $(\beta_3)$ .

Ta có :  $\vec{n}_{\alpha_3} = (1 ; 2 ; 3)$  và  $\vec{n}_{\beta_3} = (3 ; 6 ; 9)$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } (\alpha_3) \equiv (\beta_3).$$

**Ví dụ 2.** Xác định giá trị của  $m$  để cặp mặt phẳng sau đây vuông góc

$$(\alpha) : 2x + my + 2mz - 9 = 0,$$

$$(\beta) : 6x - y - z - 10 = 0.$$

**Giải**

Gọi  $\vec{n}_\alpha$  và  $\vec{n}_\beta$  lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .

Ta có :  $\vec{n}_\alpha = (2 ; m ; 2m)$

$$\vec{n}_\beta = (6 ; -1 ; -1).$$

Điều kiện cần và đủ để  $(\alpha) \perp (\beta)$  là  $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$ .

Ta có :  $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$

$$\Leftrightarrow 12 - m - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy  $(\alpha)$  vuông góc với  $(\beta)$  khi và chỉ khi  $m = 4$ .

**Ví dụ 3.** Xác định giá trị của  $m$  và  $n$  để cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau :

$$(\alpha) : 2x + my + 3z - 5 = 0,$$

$$(\beta) : nx - 8y - 6z + 2 = 0.$$

**Giải**

Ta có :  $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = -12 \\ -6m = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ m = 4. \end{cases}$



### **VẤN ĐỀ 3**

Tính khoảng cách

#### **1. Phương pháp giải**

**Loại 1.** Tính khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  :

$Ax + By + Cz + D = 0$ , ta dùng công thức  $d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

**Loại 2.** Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (h.3.8)

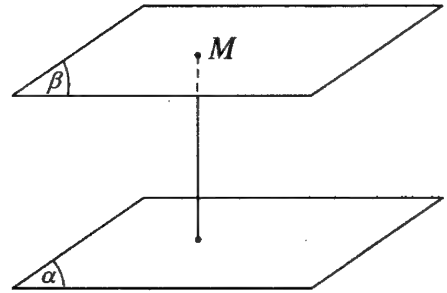
$$(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– Ta chọn một điểm  $M$  thuộc  $(\beta)$

$$\left( \text{chẳng hạn điểm } M \left( 0; 0; -\frac{D_2}{C_2} \right) \right);$$

– Ta có  $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha))$ .



Hình 3.8

**Ví dụ 1.** Cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(3; 4; 1)$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình :  $x + 2y + 2z - 10 = 0$ .

Tính khoảng cách từ  $A, B$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$ .

**Giải**

$$\text{Ta có : } d(A, (\alpha)) = \frac{|x_A + 2y_A + 2z_A - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 + 4 - 10|}{3} = \frac{7}{3}$$

$$d(B, (\alpha)) = \frac{|x_B + 2y_B + 2z_B - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 8 + 2 - 10|}{3} = 1.$$

**Ví dụ 2.** Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  cho bởi phương trình sau đây :

$$(\alpha) : x + 2y + 2z + 11 = 0,$$

$$(\beta) : x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

**Giải**

Ta lấy điểm  $M(0; 0; -1)$  thuộc mặt phẳng  $(\beta)$ , kí hiệu  $d((\alpha), (\beta))$  là khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ . Ta có

$$\begin{aligned} d((\alpha), (\beta)) &= d(M, (\alpha)) = \frac{|x_M + 2y_M + 2z_M + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|0 + 2 \cdot (0) + 2 \cdot (-1) + 11|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Vậy  $d((\alpha), (\beta)) = 3$ .

**V dụ 3.** Tìm trên trục  $Oz$  điểm  $M$  cách đều điểm  $A(2 ; 3 ; 4)$  và mặt phẳng  $(\alpha) : 2x + 3y + z - 17 = 0$ .

**Giải**

Xét điểm  $M(0 ; 0 ; z) \in Oz$ , ta có :

Điểm  $M$  cách đều điểm  $A$  và mặt phẳng  $(\alpha)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow AM = d(M, (\alpha)) &\Leftrightarrow \sqrt{4 + 9 + (z - 4)^2} = \frac{|z - 17|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} \\ \Leftrightarrow 13 + (z - 4)^2 &= \frac{(z - 17)^2}{14} \\ \Leftrightarrow 14(z^2 - 8z + 29) &= z^2 - 34z + 289 \\ \Leftrightarrow 13z^2 - 78z + 117 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= 3. \end{aligned}$$

Vậy điểm  $M(0 ; 0 ; 3)$  là điểm cần tìm.

### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**3.17.** Viết phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  trong các trường hợp sau :

- a)  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(2 ; 0 ; 1)$  và nhận  $\vec{n} = (1 ; 1 ; 1)$  làm vectơ pháp tuyến ;
- b)  $(\alpha)$  đi qua điểm  $A(1 ; 0 ; 0)$  và song song với giá của hai vectơ  $\vec{u} = (0 ; 1 ; 1)$ ,  $\vec{v} = (-1 ; 0 ; 2)$  ;
- c)  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $M(1 ; 1 ; 1)$ ,  $N(4 ; 3 ; 2)$ ,  $P(5 ; 2 ; 1)$ .

**3.18.** Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$  với  $A(1 ; -2 ; 4)$ ,  $B(3 ; 6 ; 2)$ .

**3.19.** Cho tứ diện có các đỉnh là  $A(5 ; 1 ; 3)$ ,  $B(1 ; 6 ; 2)$ ,  $C(5 ; 0 ; 4)$ ,  $D(4 ; 0 ; 6)$ .

- a) Hãy viết phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  ;
- b) Hãy viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $D$  và song song với mặt phẳng  $(ABC)$ .

**3.20.** Hãy viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua gốc tọa độ  $O(0; 0; 0)$  và song song với mặt phẳng  $(\beta) : x + y + 2z - 7 = 0$ .

**3.21.** Lập phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(2; 3; 1)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\beta) : x + 2y - z = 0$ .

**3.22.** Xác định các giá trị của  $A, B$  để hai mặt phẳng sau đây song song với nhau :

$$(\alpha) : Ax - y + 3z + 2 = 0,$$

$$(\beta) : 2x + By + 6z + 7 = 0.$$

**3.23.** Tính khoảng cách từ điểm  $M(1; 2; 0)$  lần lượt đến các mặt phẳng sau :

a)  $(\alpha) : x + 2y - 2z + 1 = 0;$

b)  $(\beta) : 3x + 4z + 25 = 0;$

c)  $(\gamma) : z + 5 = 0.$

**3.24.** Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng

$$(\alpha) : 3x - y + 4z + 2 = 0,$$

$$(\beta) : 3x - y + 4z + 8 = 0.$$

**3.25.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 1. Dùng phương pháp tọa độ để :

a) Chứng minh hai mặt phẳng  $(AB'D')$  và  $(BC'D)$  song song ;

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

**3.26.** Lập phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(3; -1; -5)$  đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\beta) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0,$$

$$(\gamma) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

**3.27.** Cho điểm  $A(2; 3; 4)$ . Hãy viết phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua các hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục tọa độ.

**3.28.** Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi phương trình tổng quát sau đây :

a)  $(\alpha_1) : 3x - 2y - 3z + 5 = 0,$

b)  $(\alpha'_1) : 9x - 6y - 9z - 5 = 0.$



b)  $(\alpha_2) : x - 2y + z + 3 = 0,$

$(\alpha'_2) : x - 2y - z + 3 = 0.$

c)  $(\alpha_3) : x - y + 2z - 4 = 0,$

$(\alpha'_3) : 10x - 10y + 20z - 40 = 0.$

**3.29.** Viết phương trình của mặt phẳng  $(\beta)$  đi qua điểm  $M(2; -1; 2)$ , song song với trục  $Oy$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha) : 2x - y + 3z + 4 = 0.$

**3.30.** Lập phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1; 2; 3)$  và cắt ba tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại  $A, B, C$  sao cho thể tích tứ diện  $OABC$  nhỏ nhất.

### §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I- PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

1. Cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và nhận vector  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  với  $\vec{a} \neq \vec{0}$  làm vector chỉ phương.  $\Delta$  có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và nhận vector  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  sao cho  $a_1 a_2 a_3 \neq 0$  làm vector chỉ phương.  $\Delta$  có phương

trình chính tắc là :  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$

#### II- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, TRÙNG NHAU, CẮT NHAU HOẶC CHÉO NHAU

Cho hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  lần lượt đi qua hai điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$  và có vector chỉ phương lần lượt là  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3).$

Đặt  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$ , ta có các điều kiện sau :

$$1) d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$$

$$2) d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$$

$$3) d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$$

$$4) d \text{ và } d' \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$$

$$5) d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0.$$

### III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT HOẶC VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vectơ chỉ phương là  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ , và cho mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình :  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Gọi  $\vec{n} = (A; B; C)$  là vectơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ . Ta có các điều kiện sau :

$$1) d // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$$

$$2) d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$$

$$3) d \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$$

$$4) d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}.$$

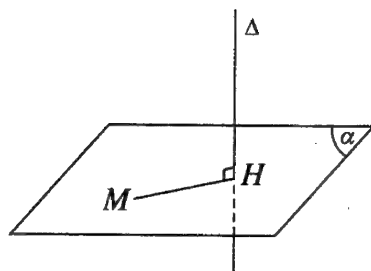
### IV- TÍNH KHOẢNG CÁCH

I. Trong không gian  $Oxyz$ , để tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $\Delta$  ta thực hiện các bước :

\* Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $M$  và vuông góc với  $\Delta$  ;

\* Tìm giao điểm  $H$  của  $\Delta$  với  $(\alpha)$  ;

\* Khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta$  chính là khoảng cách giữa hai điểm  $M$  và  $H$  :  
 $d(M, \Delta) = MH$  (h.3.9).

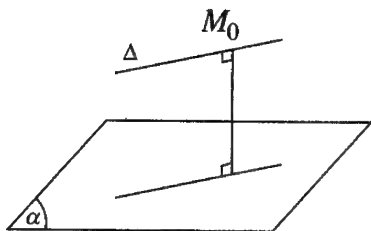


Hình 3.9

2. Để tính khoảng cách giữa đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $\Delta$  ta thực hiện các bước :

\* Lấy một điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  tùy ý trên  $\Delta$  ;

\* Khoảng cách giữa  $\Delta$  và  $(\alpha)$  chính là khoảng cách từ điểm  $M_0$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  :  $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$  (h.3.10).



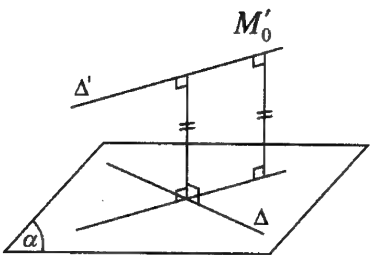
Hình 3.10

3. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $\Delta$  và  $\Delta'$  ta thực hiện các bước :

\* Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $\Delta$  và song song với đường thẳng  $\Delta'$  ;

\* Lấy một điểm  $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$  tùy ý trên  $\Delta'$  ;

\* Khoảng cách giữa  $\Delta$  và  $\Delta'$  chính là khoảng cách từ điểm  $M'_0$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  :  $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$  (h.3.11).



Hình 3.11

## B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$

#### 1. Phương pháp giải

**Bước 1 :** Xác định một điểm cố định  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  thuộc  $\Delta$ .

**Bước 2 :** Xác định một vectơ chỉ phương  $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$  của  $\Delta$ .

**Bước 3 :** Phương trình tham số và phương trình chính tắc của  $\Delta$  lần lượt có dạng

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

$$\Delta : \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \text{ (nếu } a_1, a_2, a_3 \text{ đều khác 0).}$$

## 2. Ví dụ

**Ví dụ.** Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(1; 2; 3), B(3; 5; 7)$ .

**Giải**

$\Delta$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  nên có vectơ chỉ phương là  $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 4)$ .

Vậy phương trình tham số của  $\Delta$  là  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của  $\Delta$  là  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ .



## VẤN ĐỀ 2

Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$  trong không gian

### 1. Phương pháp giải

**Bước 1 :** Xác định điểm cố định  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và vectơ chỉ phương  $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$  của  $\Delta$ . Xác định điểm cố định  $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$  và vectơ chỉ phương  $\vec{a}' (a'_1; a'_2; a'_3)$  của  $\Delta'$  (h.3.12).

**Bước 2 :** Tính  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$ .

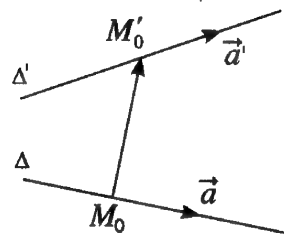
**Bước 3 :** Dùng các dấu hiệu sau để xét vị trí tương đối giữa  $\Delta$  và  $\Delta'$  :

$$\Delta // \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta \equiv \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta \text{ cắt } \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta \text{ và } \Delta' \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0.$$



Hình 3.12

## 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Xét vị trí tương đối của đường thẳng  $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$  lần lượt với các đường thẳng sau

$$d_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{2} ;$$

$$d_2 : \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-3}{3} ;$$

$$d_3 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{5} ;$$

$$d_4 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

### **Giải**

Ta có đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(1; -1; 5)$  và có vector chỉ phương  $\vec{a} = (2; 3; 1)$ .

a)  $d_1$  đi qua điểm  $M_1(3; 2; 6)$  và có vector chỉ phương  $\vec{a}_1 = (4; 6; 2)$ .

Ta có  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_1 = (0; 0; 0) = \vec{0}$ .

$M_1$  thuộc  $\Delta$  (vì  $\frac{3-1}{2} = \frac{2+1}{3} = \frac{6-5}{1}$ ). Vậy  $\Delta \equiv d_1$ .

b)  $d_2$  đi qua  $M_2(4; 1; 3)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_2 = (6; 9; 3)$ .

Ta có  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_2 = (0; 0; 0) = \vec{0}$ .

$M_2$  không thuộc  $\Delta$  (vì  $\frac{4-1}{2} \neq \frac{1+1}{3}$ ). Vậy  $\Delta \nparallel d_2$ .

c)  $d_3$  đi qua điểm  $M_3(3; 2; 6)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_3 = (4; 3; 5)$ .

Ta có:  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_3 = (12; -6; -6) \neq \vec{0}$ .

$$\overrightarrow{M_0M_3} = (2; 3; 1),$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_3} = 24 - 18 - 6 = 0.$$

Vậy  $\Delta$  cắt  $d_3$ .

d)  $d_4$  đi qua  $M_4(1; -2; -1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_4 = (3; 2; 2)$ .

Ta có:  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_4 = (4; -1; -5)$ .

$$\overrightarrow{M_0M_4} = (0; -1; -6),$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_4} = 0 + 1 + 30 \neq 0.$$

Vậy  $\Delta$  và  $d_4$  là hai đường thẳng chéo nhau.

**Ví dụ 2.** Cho hai đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$  và  $d': \begin{cases} x = 3-t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases}$ .

a) Hãy xét vị trí tương đối giữa  $d$  và  $d'$ .

b) Tìm giao điểm nếu có của  $d$  và  $d'$ .

**Giải**

a) Phương trình tham số của  $d$ :  $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = -t' \end{cases}$

$$\text{Xét hệ phương trình : (I) } \begin{cases} 3-t=1+2t' & (1) \\ 2t=-1+t' & (2) \\ -1+t=-t' & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ (1) và (2) ta được : } \begin{cases} t+2t'=2 \\ 2t-t'=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=1. \end{cases}$$

Các giá trị của  $t, t'$  này thỏa mãn (3). Do đó hệ phương trình (I) có một nghiệm.  
Vậy  $d$  cắt  $d'$ .

b) Thay  $t=0$  vào phương trình tham số của  $d'$  ta được giao điểm là  $M(3; 0; -1)$ .



### **VẤN ĐỀ 3**

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

#### **1. Phương pháp giải**

Cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ , cho mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình tổng quát

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Gọi  $\vec{n}(A; B; C)$  là vectơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ . Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  ta có các cách sau :

*Cách 1.* Xét tích vô hướng  $\vec{n} \cdot \vec{a}$  và thay tọa độ của điểm  $M_0$  vào phương trình của  $(\alpha)$  để kiểm tra, ta có các trường hợp sau.

$$\text{Trường hợp 1. } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d \text{ song song với } (\alpha)$$

$$\text{Trường hợp 2. } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d \text{ nằm trong } (\alpha)$$

$$\text{Trường hợp 3. } \vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow d \text{ cắt } (\alpha)$$

$$\text{Trường hợp 4. } \vec{n} = k\vec{a} \Leftrightarrow d \text{ vuông góc với } (\alpha).$$

Cách 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  : 
$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

– Thay  $x, y, z$  ở phương trình tham số trên vào phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(\alpha)$  :  $Ax + By + Cz + D = 0$  ta được

$$A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0 \text{ hay } mt + n = 0. \quad (1)$$

Xét số nghiệm  $t$  của phương trình (1) ta có các trường hợp sau.

**Trường hợp 1 :** (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow d \text{ song song với } (\alpha).$$

**Trường hợp 2 :** (1) có một nghiệm  $t = t_0$

$$\Leftrightarrow d \text{ cắt } (\alpha) \text{ tại điểm } M_0(x_0 + t_0 a_1; y_0 + t_0 a_2; z_0 + t_0 a_3)$$

**Trường hợp 3 :** (1) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow d \text{ nằm trong } (\alpha)$$

**Trường hợp 4 :**  $(A; B; C) = k(a_1; a_2; a_3)$

$$\Leftrightarrow d \text{ vuông góc với } (\alpha).$$

## 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Xét vị trí tương đối của đường thẳng  $\Delta$  
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

lần lượt với các mặt phẳng sau  $(\alpha_1)$  :  $x + y + z + 2 = 0$  ;

$$(\alpha_2) : 4x + 8y + 2z - 7 = 0 ;$$

$$(\alpha_3) : x - y + 2z + 5 = 0 ;$$

$$(\alpha_4) : 2x - 2y + 4z - 10 = 0.$$

### ***Giải***

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(1; 2; 3)$  và có vector chỉ phương  $\vec{a} = (2; 4; 1)$ .

Các mặt phẳng  $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4)$  có vector pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (1; 1; 1), \vec{n}_2 = (4; 8; 2), \vec{n}_3 = (1; -1; 2), \vec{n}_4 = (2; -2; 4).$$



Ta có :

a)  $\vec{n}_1 \cdot \vec{a} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$ . Vậy đường thẳng  $\Delta$  cắt mặt phẳng  $(\alpha_1)$ .

b)  $\vec{n}_2 = 2\vec{a}$ . Vậy đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với  $(\alpha_2)$ .

c)  $\begin{cases} \vec{n}_3 \cdot \vec{a} = 2 - 4 + 2 = 0 \\ M_0 \notin (\alpha_3) \text{ (vì } 1 - (2) + 2 \cdot (3) + 5 \neq 0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng  $\Delta$  song song với  $(\alpha_3)$ .

d)  $\begin{cases} \vec{n}_4 \cdot \vec{a} = 4 - 8 + 4 = 0 \\ M_0 \in (\alpha_4) \text{ (vì } 2 \cdot (1) - 2 \cdot (2) + 4 \cdot (3) - 10 = 0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha_4)$ .

**V dụ 2.** Cho đường thẳng  $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$

và mặt phẳng  $(\alpha) : x + 2y + z - 1 = 0$ .

Chứng minh rằng  $d$  cắt  $(\alpha)$  và tìm tọa độ giao điểm.

***Giải***

Phương trình tham số của  $d$  là  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t. \end{cases}$

Thay  $x, y, z$  ở phương trình trên vào phương trình tổng quát của  $(\alpha)$  ta được :

$$(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Phương trình (1) có một nghiệm  $t_0 = \frac{2}{3}$ , vậy  $d$  cắt  $(\alpha)$  tại điểm

$$M_0 \left( 1 + \frac{4}{3}; -1 + \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) \text{ hay } M_0 \left( \frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right).$$



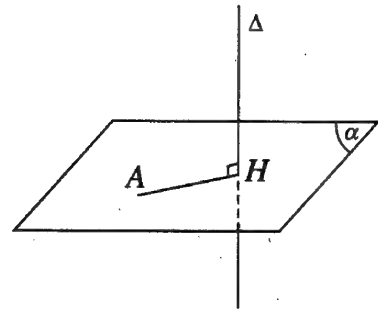
## VẤN ĐỀ 4

Tính khoảng cách

### 1. Phương pháp giải

**Loại 1.** Khoảng cách từ điểm  $A(x_A; y_A; z_A)$  đến đường thẳng  $\Delta$  :

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$



Hình 3.13

Cách 1

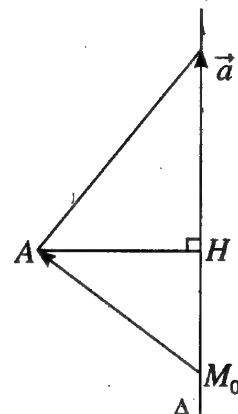
- \* Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa điểm A và vuông góc với  $\Delta$
- \* Tìm giao điểm H của  $\Delta$  và  $(\alpha)$
- \* Tính  $d(A, \Delta) = AH$  (h.3.13).

Cách 2

- \* Lấy điểm  $M_0 \in \Delta$

- \* Tính  $\vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{a}$

- \*  $d(A, \Delta) = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|}$  (h.3.14).



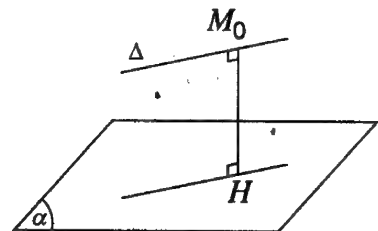
Hình 3.14

**Loại 2.** Khoảng cách giữa đường thẳng  $\Delta : \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$  và mặt phẳng  $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$  song song với  $\Delta$

Cách giải

- \* Lấy điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  thuộc  $\Delta$
- \* Tính  $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (\text{h.3.15}).$$



Hình 3.15

### Loại 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$$\Delta: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

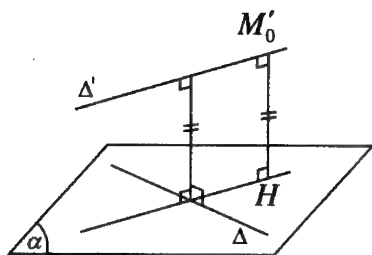
$$\Delta': \frac{x-x'_0}{a'_1} = \frac{y-y'_0}{a'_2} = \frac{z-z'_0}{a'_3}$$

#### Cách 1

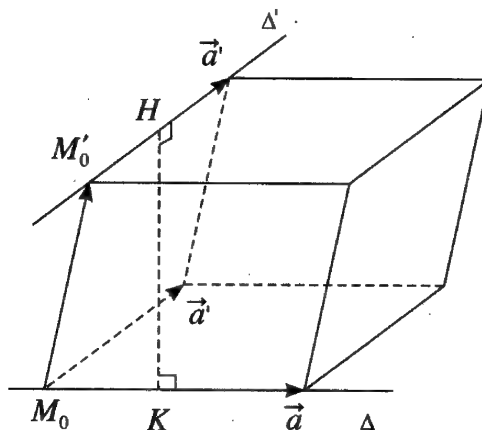
\* Lập phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $\Delta$  và song song với  $\Delta'$  ta được  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ .

\* Lấy điểm  $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$  thuộc  $\Delta'$ .

\* Tính  $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  (h.3.16).



Hình 3.16



Hình 3.17

#### Cách 2

\* Xác định điểm  $M_0 \in \Delta$  và  $M'_0 \in \Delta'$ .

\* Xác định hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a}'$  là hai vectơ chỉ phương của  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

\* Tính  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$ .

\* Tính  $V = |\overrightarrow{M_0M'_0} \cdot \vec{n}|$ .

\* Tính  $d(\Delta, \Delta') = HK = \frac{V}{|\vec{n}|}$  (h.3.17).

## 2. Ví dụ

**Ví dụ 1.** Tính khoảng cách từ điểm  $A(1; 2; 1)$  đến đường thẳng  $\Delta$  :

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

**Giải**

*Cách 1*

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $A$  và vuông góc với  $\Delta$ .

Ta có  $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_\Delta = (1; 2; -2)$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là  $1(x-1) + 2(y-2) - 2(z-1) = 0$

$$\text{hay } x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

$$\text{Phương trình tham số của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 2t, \end{cases}$$

thay  $x, y, z$  ở trên vào phương trình  $(\alpha)$  ta được :

$$(-2 + t) + 2(1 + 2t) - 2(-1 - 2t) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{9}.$$

Vậy  $(\alpha)$  cắt  $\Delta$  tại điểm  $H\left(-2 + \frac{1}{9}; 1 + \frac{2}{9}; -1 - \frac{2}{9}\right)$  hay  $H\left(-\frac{17}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{11}{9}\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d(A, \Delta) = AH &= \sqrt{\left(-\frac{17}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{9} - 2\right)^2 + \left(-\frac{11}{9} - 1\right)^2} \\ &= \frac{15\sqrt{5}}{9} = \frac{5\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

*Cách 2*

\*  $\Delta$  đi qua  $M_0(-2; 1; -1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (1; 2; -2)$ .

Ta có  $\overrightarrow{M_0A} = (3; 1; 2)$ .

$$* \vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{a} = (-6; 8; 5).$$

$$* \text{Vậy } d(A, \Delta) = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{36+64+25}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

**Ví dụ 2.** Cho mặt phẳng  $(\alpha) : 3x - 2y - z + 5 = 0$  và đường thẳng  $\Delta :$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}.$$

a) Hãy chứng tỏ  $\Delta$  song song với  $(\alpha)$ .

b) Tính khoảng cách giữa  $\Delta$  và  $(\alpha)$ .

**Giải**

a) Ta có  $\vec{n}_\alpha = (3; -2; -1)$

$$\vec{a}_\Delta = (2; 1; 4),$$

$\Delta$  đi qua điểm  $M_0(1; 7; 3)$ .

Ta có  $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{a}_\Delta = 6 - 2 - 4 = 0$  và  $M_0 \notin (\alpha)$ . Vậy  $\Delta$  song song với  $(\alpha)$ .

$$b) d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \frac{|3 \cdot (1) - 2 \cdot (7) - (3) + 5|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$

**Ví dụ 3.** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

**Giải**

**Cách 1**

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta$  và song song với  $\Delta'$ . Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là:  $\vec{a} = (2; -1; 0)$  và  $\vec{a}' = (-1; 1; 1)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1; -2; 1)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $\Delta$  nên đi qua điểm  $M_0(1; -1; 1)$ . Phương trình  $(\alpha)$  có dạng  $-(x-1) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0$ .

$\Delta'$  đi qua điểm  $M'_0(2; -2; 3)$ .

$$\text{Vậy } d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|2 - 4 - 3 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

*Cách 2*

Ta có  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1; -2; 1)$

$$\overrightarrow{M_0M'_0} = (1; -1; 2),$$

$$V = |\overrightarrow{M_0M'_0} \cdot \vec{n}| = |-1 + 2 + 2| = 3.$$

$$\text{Vậy } d(\Delta, \Delta') = \frac{V}{|\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**3.31.** Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  trong các trường hợp sau :

a)  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1; 2; 3)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (3; 3; 1)$ ;

b)  $\Delta$  đi qua điểm  $B(1; 0; -1)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  :

$$2x - y + z + 9 = 0;$$

c)  $\Delta$  đi qua hai điểm  $C(1; -1; 1)$  và  $D(2; 1; 4)$ .

**3.32.** Viết phương trình của đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha) : y + 2z = 0$

$$\text{và cắt hai đường thẳng } d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4. \end{cases}$$

**3.33.** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng  $d$  và  $d'$  cho bởi các phương trình sau :

$$\text{a) } d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} \quad \text{và} \quad d' : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{2};$$

$$\text{b) } d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 8 + 2t' \\ z = 10 - 2t' \end{cases};$$

$$c) d: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5t. \end{cases}$$

**3.34.** Tìm  $a$  để hai đường thẳng sau đây song song

$$d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = at \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = a + 4t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$$

**3.35.** Xét vị trí tương đối của đường thẳng  $d$  với mặt phẳng  $(\alpha)$  trong các trường hợp sau :

$$a) d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\alpha): x + 2y + z - 3 = 0;$$

$$b) d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\alpha): x + z + 5 = 0;$$

$$c) d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\alpha): x + y + z - 6 = 0.$$

**3.36.** Tính khoảng cách từ điểm  $A(1; 0; 1)$  đến đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ .

**3.37.** Cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$

và mặt phẳng  $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$ .

a) Chứng minh rằng  $\Delta$  song song với  $(\alpha)$ .

b) Tính khoảng cách giữa  $\Delta$  và  $(\alpha)$ .

**3.38.** Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$  trong các trường hợp sau :

$$a) \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3t' \end{cases};$$

$$\text{b) } \Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta' : \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t' \end{cases};$$

**3.39.** Cho hai đường thẳng  $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ ,

$$\Delta' : \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

- a) Xét vị trí tương đối giữa  $\Delta$  và  $\Delta'$  ;  
b) Tính khoảng cách giữa  $\Delta$  và  $\Delta'$ .

**3.40.** Cho điểm  $M(2 ; -1 ; 1)$  và đường thẳng  $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ .

- a) Tìm tọa độ điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  trên đường thẳng  $\Delta$  ;  
b) Tìm tọa độ điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $\Delta$ .

**3.41.** Cho điểm  $M(1 ; -1 ; 2)$  và mặt phẳng  $(\alpha) : 2x - y + 2z + 12 = 0$ .

- a) Tìm tọa độ điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  trên mặt phẳng  $(\alpha)$  ;  
b) Tìm tọa độ điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua mặt phẳng  $(\alpha)$ .

**3.42.** Cho hai đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1. \end{cases}$$

Lập phương trình đường vuông góc chung của  $d$  và  $d'$ .

**3.43.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Bằng phương pháp tọa độ hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CA'$  và  $DD'$ .

**3.44.** Cho mặt phẳng  $(\alpha) : 2x + y + z - 1 = 0$

và đường thẳng  $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ .

Gọi  $M$  là giao điểm của  $d$  và  $(\alpha)$ , hãy viết phương trình của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$  vuông góc với  $d$  và nằm trong  $(\alpha)$ .



3.45. Cho hai đường thẳng  $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$  và  $d_2 : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

- a) Chứng minh rằng  $d_1$  và  $d_2$  cùng nằm trong một mặt phẳng  $(\alpha)$ .  
b) Viết phương trình của  $(\alpha)$ .

### BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.46. Cho hai đường thẳng  $\Delta_1 : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$

và  $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

- a) Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $\Delta_1$  và song song với  $\Delta_2$ .  
b) Cho điểm  $M(2; 1; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  thuộc đường thẳng  $\Delta_2$  sao cho đoạn thẳng  $MH$  có độ dài nhỏ nhất.

3.47. Trong không gian  $Oxyz$  cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(a; 0; 0)$ ,  $D(0; a; 0)$ ,  $A'(0; 0; b)$  với  $a > 0$  và  $b > 0$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $CC'$ .

Xác định tỉ số  $\frac{a}{b}$  để hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(MBD)$  vuông góc với nhau.

3.48 Cho hai điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 8)$  và điểm  $C$  sao cho  $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$ .  
Tính khoảng cách từ trung điểm  $I$  của  $BC$  đến đường thẳng  $OA$ .

3.49. Trong không gian  $Oxyz$  cho hai mặt phẳng  $x + 3ky - z + 2 = 0$   $(\beta)$   
và  $kx - y + z + 1 = 0$   $(\gamma)$ .

Tìm  $k$  để giao tuyến của  $(\beta)$  và  $(\gamma)$  vuông góc với mặt phẳng

$$(\alpha) : x - y - 2z + 5 = 0.$$

**3.50.** Trong không gian  $Oxyz$  cho điểm  $A(-4; -2; 4)$  và đường thẳng  $d$ :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A$ , cắt và vuông góc với đường thẳng  $d$ .

**3.51.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có cạnh bằng 1. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BB_1, CD, A_1D_1$ . Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng  $MP$  và  $C_1N$ .

**3.52.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình thoi  $ABCD$ ,  $AC$  cắt  $BD$  tại gốc toạ độ  $O$ . Biết  $A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; 2\sqrt{2})$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SC$ .

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa  $SA$  và song song với  $BM$ .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BM$ .

**3.53.** Trong không gian  $Oxyz$  cho điểm  $D(-3; 1; 2)$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $A(1; 0; 11), B(0; 1; 10), C(1; 1; 8)$ .

a) Viết phương trình đường thẳng  $AC$ .

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(\alpha)$ .

c) Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $D$ , bán kính  $r = 5$ . Chứng minh mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu  $(S)$ .

**3.54.** Cho mặt phẳng  $(P): 2x - 3y + 4z - 5 = 0$  và mặt cầu  $(S)$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

a) Xác định toạ độ tâm  $I$  và bán kính  $r$  của mặt cầu  $(S)$ .

b) Tính khoảng cách từ tâm  $I$  đến mặt phẳng  $(P)$ . Từ đó chứng minh rằng mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một đường tròn mà ta kí hiệu là  $(C)$ . Xác định bán kính  $r'$  và tâm  $H$  của đường tròn  $(C)$ .

**3.55.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình tổng quát:  $2x + y - z - 6 = 0$ .

a) Viết phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  đi qua  $O$  và song song với  $(\alpha)$ .

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

c) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- 3.56.** Cho hình hộp chữ nhật có các đỉnh là  $A(3 ; 0 ; 0)$ ,  $B(0 ; 4 ; 0)$ ,  $C(0 ; 0 ; 5)$ ,  $O(0 ; 0 ; 0)$  và đỉnh  $D$  đối xứng với  $O$  qua tâm hình hộp chữ nhật.
- Xác định tọa độ đỉnh  $D$ . Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(ABD)$ .
  - Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua  $D$  và vuông góc với mặt phẳng  $(ABD)$ .
- 3.57.** Trong không gian  $Oxyz$  cho bốn điểm  $A(6 ; -2 ; 3)$ ,  $B(0 ; 1 ; 6)$ ,  $C(2 ; 0 ; -1)$ ,  $D(4 ; 1 ; 0)$ .
- Gọi  $(S)$  là mặt cầu đi qua bốn điểm  $A, B, C, D$ . Hãy viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  tại điểm  $A$ .
- 3.58.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1 ; 0 ; 0)$ ,  $B(1 ; 1 ; 1)$ ,  $C\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ .
- Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $O$  và vuông góc với  $OC$ .
  - Viết phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $AB$  và vuông góc với  $(\alpha)$ .
- 3.59.** Trong không gian  $Oxyz$  cho 4 điểm  $A(1 ; 0 ; 0)$ ,  $B(0 ; 1 ; 0)$ ,  $C(0 ; 0 ; 1)$  và  $D(1 ; 1 ; 0)$ .
- Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  đi qua bốn điểm  $A, B, C, D$ .
  - Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt cầu  $(S)$  với mặt phẳng  $(ACD)$ .
- 3.60.** Trong không gian  $Oxyz$  cho bốn điểm  $A(2 ; 4 ; -1)$ ,  $B(1 ; 4 ; -1)$ ,  $C(2 ; 4 ; 3)$ ,  $D(2 ; 2 ; -1)$ .
- Chứng minh rằng các đường thẳng  $AB, AC, AD$  vuông góc với nhau từng đôi một.
  - Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung  $\Delta$  của hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .
  - Viết phương trình mặt cầu  $(S)$  đi qua bốn điểm  $A, B, C, D$ .
  - Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  và song song với mặt phẳng  $(ABD)$ .

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**3.61.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $E(4; -1; 1), F(3; 1; -1)$  và song song với trục  $Ox$ . Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của  $(\alpha)$ ?

- (A)  $x + y = 0$ ;  
(B)  $y + z = 0$ ;  
(C)  $x + y + z = 0$ ;  
(D)  $x + z = 0$ .

**3.62.** Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $A(1; 2; 3)$  và song song với mặt phẳng  $(\beta): x - 4y + z + 12 = 0$ . Phương trình nào sau đây là phương trình của  $(\alpha)$ ?

- (A)  $x - 4y + z + 4 = 0$  ;                      (C)  $x - 4y + z - 12 = 0$  ;  
(B)  $x - 4y + z - 4 = 0$  ;                      (D)  $x - 4y + z + 3 = 0$ .

**3.63.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $I(2 ; 6 ; -3)$  và các mặt phẳng :

$$(a) : x - 2 = 0$$

$$(\beta) : y - 6 = 0$$

$$(\gamma): z + 3 = 0.$$

**Tìm mệnh đề *sai* trong các mệnh đề sau :**

- (A)  $(\alpha) \text{ di qua } I$ ; (C)  $(\gamma) // Oz$ ;  
(B)  $(\beta) // (xOz)$ ; (D)  $(\alpha) \perp (\beta)$ .

**3.64.** Phương trình của mặt phẳng chứa trục  $Oy$  và điểm  $Q(1; 4; -3)$  là :

- (A)  $3x + z = 0$  ; (C)  $3x + y = 0$  ;  
(B)  $x + 3z = 0$  ; (D)  $3x - z = 0$ .

**3.65.** Cho mặt phẳng  $(\alpha) : 2y + z = 0$ . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

- (A)  $(\alpha) // Ox$ ;                      (C)  $(\alpha) // (yOz)$ ;  
 (B)  $(\alpha) // Oy$ ;                      (D)  $(\alpha) \supset Ox$ .

**3.66.** Cho ba điểm  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(-1; 0; 4)$ ,  $C(0; -2; -1)$ . Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $BC$  ?

- (A)  $x - 2y - 5z + 5 = 0$  ;                      (C)  $x - 2y - 5z = 0$  ;  
(B)  $x - 2y - 5z - 5 = 0$  ;                      (D)  $2x - y + 5z - 5 = 0$ .

3.67. Gọi  $(\gamma)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $M(3; -1; -5)$  và vuông góc với hai mặt phẳng :  $(\alpha) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ ,

$$(\beta) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

Phương trình tổng quát của  $(\gamma)$  là :

(A)  $2x + y - 2z - 15 = 0$  ;

(C)  $x + y + z + 3 = 0$  ;

(B)  $2x + y - 2z + 15 = 0$  ;

(D)  $2x + y - 2z - 16 = 0$ .

3.68. Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số : 
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t. \end{cases}$$

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của  $d$  ?

(A)  $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$  ;

(C)  $x - 2 = y = z + 3$  ;

(B)  $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$  ;

(D)  $x + 2 = y = z - 3$ .

3.69. Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số : 
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$$

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của  $d$  ?

(A)  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$  ;

(C)  $2x + y + z - 5 = 0$  ;

(B)  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  ;

(D)  $x + y + z - 3 = 0$ .

3.70. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1; 2; -3)$  và  $B(3; -1; 1)$  ?

(A)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$  ;

(C)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$  ;

(B)  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$  ;

(D)  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$ .

3.71. Toạ độ giao điểm  $M$  của đường thẳng  $d : \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$  và mặt phẳng

$(\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0$  là :

(A)  $(1; 0; 1)$  ;

(B)  $(0; 0; -2)$  ;

(C)  $(1; 1; 6)$  ;

(D)  $(12; 9; 1)$ .

3.72. Cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  và mặt phẳng  $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$ .

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

- (A)  $d // (\alpha)$ ; (B)  $d$  cắt  $(\alpha)$ ; (C)  $d \subset (\alpha)$ ; (D)  $d \perp (\alpha)$ .

3.73. Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$  và mặt phẳng  $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$ .

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

- (A)  $d$  cắt  $(\alpha)$ ; (B)  $d // (\alpha)$ ; (C)  $d \subset (\alpha)$ ; (D)  $d \perp (\alpha)$ .

3.74. Hãy tìm kết luận đúng về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng :

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

- (A)  $d$  cắt  $d'$ ; (C)  $d$  chéo với  $d'$ ;  
(B)  $d \equiv d'$ ; (D)  $d // d'$ .

3.75. Giao điểm của hai đường thẳng :

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases} \quad \text{là:}$$

- (A)  $(-3; -2; 6)$ ; (C)  $(3; 7; 18)$ ;  
(B)  $(5; -1; 20)$ ; (D)  $(3; -2; 1)$ .

3.76. Tìm  $m$  để hai đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

- (A)  $m = 0$ ; (B)  $m = 1$ ; (C)  $m = -1$ ; (D)  $m = 2$ .

3.77. Khoảng cách từ điểm  $M(-2; -4; 3)$  đến mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$  là :

- (A) 3; (B) 2; (C) 1; (D) 11.

**3.78.** Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A(2; -1; -1)$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$ :

$16x - 12y - 15z - 4 = 0$ . Độ dài của đoạn  $AH$  là:

- (A) 55;      (B)  $\frac{11}{5}$ ;      (C)  $\frac{11}{25}$ ;      (D)  $\frac{22}{5}$ .

**3.79.** Cho mặt cầu tâm  $I(4; 2; -2)$  bán kính  $r$  tiếp xúc với mặt phẳng

$(P): 12x - 5z - 19 = 0$ . Bán kính  $r$  bằng:

- (A) 39;      (B) 3;      (C) 13;      (D)  $\frac{39}{\sqrt{13}}$ .

**3.80.** Cho hai mặt phẳng song song:

$$(\alpha): x + y - z + 5 = 0$$

và  $(\beta): 2x + 2y - 2z + 3 = 0$ .

Khoảng cách giữa  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là:

- (A)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ;      (B) 2;      (C)  $\frac{7}{2}$ ;      (D)  $\frac{7}{2\sqrt{3}}$ .

**3.81.** Khoảng cách từ điểm  $M(2; 0; 1)$  đến đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$  là:

- (A)  $\sqrt{12}$ ;      (B)  $\sqrt{3}$ ;      (C)  $\sqrt{2}$ ;      (D)  $\frac{12}{\sqrt{6}}$ .

**3.82.** Bán kính của mặt cầu tâm  $I(1; 3; 5)$  và tiếp xúc với đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{là:}$$

- (A)  $\sqrt{14}$ ;      (B) 14;      (C)  $\sqrt{7}$ ;      (D) 7.

**3.83.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \quad \text{là:}$$

- (A)  $\sqrt{6}$ ;      (B)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ;      (C)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ;      (D)  $\sqrt{2}$ .

3.84. Toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 0; 1)$  trên đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{là:}$$

- (A)  $(1; 0; 2)$ ;      (B)  $(2; 2; 3)$ ;      (C)  $(0; -2; 1)$ ;      (D)  $(-1; -4; 0)$ .

3.85. Cho mặt phẳng  $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$

và đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ .

Gọi  $(\beta)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta$  và song song với  $(\alpha)$ . Khoảng cách giữa  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là:

- (A)  $\frac{9}{14}$ ;      (B)  $\frac{9}{\sqrt{14}}$ ;      (C)  $\frac{3}{14}$ ;      (D)  $\frac{3}{\sqrt{14}}$ .

## HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

### §1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

3.1.  $\vec{m} = (-4; -2; 3)$ ,

$\vec{n} = (-9; 2; 1)$ .

3.2. a) Ta biết rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi  $\vec{a} = k\vec{b}$  với  $k$  là một số thực. Theo giả

thiết ta có  $\vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$  với  $x_0 = 2$ . Ta suy ra  $k = \frac{1}{2}$  nghĩa là  $1 = \frac{1}{2}x_0$ .

Do đó:  $-3 = \frac{1}{2}y_0$  nên  $y_0 = -6$ ,

$4 = \frac{1}{2}z_0$  nên  $z_0 = 8$ .

Vậy ta có  $\vec{b} = (2; -6; 8)$ .

b) Theo giả thiết ta có  $\vec{c} = -2\vec{a}$ .

Do đó toạ độ của  $\vec{c}$  là:  $\vec{c} = (-2; 6; -8)$ .

3.3. Gọi  $M'$ ,  $M''$ ,  $M'''$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  trên các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  (h.3.18).

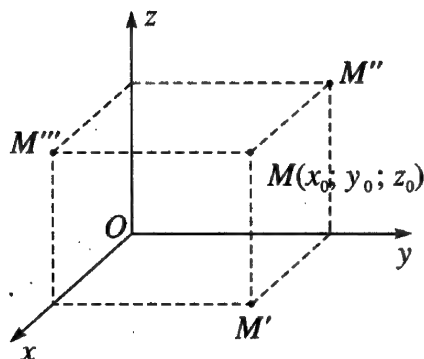


Ta có :

$$M'(x_0; y_0; 0)$$

$$M''(0; y_0; z_0)$$

$$M'''(x_0; 0; z_0).$$



Hình 3.18

3.4. a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$

$$\overrightarrow{AC} = (-1; -3; 0).$$

Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương, nghĩa là  $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$  với  $k$  là một số thực.

$$\text{Giả sử ta có } \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}, \text{ khi đó : } \begin{cases} k \cdot (-1) = -1 \\ k \cdot (-3) = -2 \\ k \cdot (0) = 1. \end{cases}$$

Ta không tìm được số  $k$  nào thỏa mãn đồng thời cả ba đẳng thức trên. Vậy ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Ta có  $\overrightarrow{MN} = (-5; 2; 0)$  và  $\overrightarrow{MP} = (-10; 4; 0)$ . Hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{MP}$  với  $k = \frac{1}{2}$  nên ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

3.5. Điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là  $(x; 0; z)$ , cần phải tìm  $x$  và  $z$ . Ta có :

$$MA^2 = (1-x)^2 + 1 + (1-z)^2$$

$$MB^2 = (-1-x)^2 + 1 + z^2$$

$$MC^2 = (3-x)^2 + 1 + (-1-z)^2.$$

Theo giả thiết  $M$  cách đều ba điểm  $A, B, C$  nên ta có  $MA^2 = MB^2 = MC^2$ .

$$\text{Từ đó ta tính được } M = \left( \frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6} \right).$$

3.6. a) Ta có  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Do đó :  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$  vì  $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ .

b) Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$  nên :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ .

Do đó :  $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DB}$ .

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}.$$

3.7. a) Ta có  $MPNQ$  là hình bình hành vì  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \text{ hay } 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad (2)$$

$$\text{vì } \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} \text{ (h.3.19).}$$

Từ (1) và (2) ta có :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$   
là đẳng thức cần chứng minh.

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \frac{\overrightarrow{CD}}{2}.$$

$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$$

$$\text{nên } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \quad (4)$$

$$\text{vì } \overrightarrow{CB} - (-\overrightarrow{BC}) = \vec{0}.$$

Từ (3) và (4) ta suy ra  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$  là đẳng thức cần chứng minh.

3.8. Muốn chứng tỏ rằng ba vectơ  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  đồng phẳng ta cần tìm hai số thực  $p$  và  $q$  sao cho  $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$ .

$$\text{Giả sử có } \vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$$

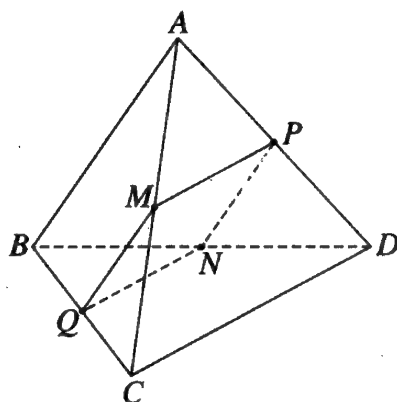
$$2\vec{c} - 3\vec{a} = p(\vec{a} - 2\vec{b}) + q(3\vec{b} - \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow (3+p)\vec{a} + (3q-2p)\vec{b} - (q+2)\vec{c} = \vec{0} \quad (1)$$

Vì ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  lấy tùy ý nên đẳng thức (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3+p = 0 \\ 3q-2p = 0 \\ q+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = -2. \end{cases}$$

Như vậy ta có :  $\vec{w} = -3\vec{u} - 2\vec{v}$  nên ba vectơ  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  đồng phẳng.

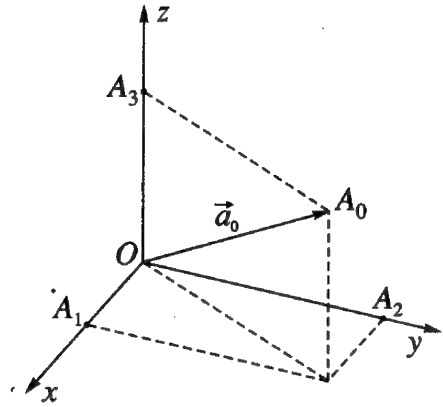


Hình 3.19

3.9. Gọi  $\vec{a}_0$  là vectơ đơn vị cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$ , ta có  $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$  (h.3.20).

Gọi  $\vec{OA}_0 = \vec{a}_0$  và các điểm  $A_1, A_2, A_3$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm  $A_0$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ .

$$\text{Khi đó ta có : } \frac{|\vec{OA}_1|}{|\vec{OA}_0|} = \cos \alpha, \quad \frac{|\vec{OA}_2|}{|\vec{OA}_0|} = \cos \beta, \\ \frac{|\vec{OA}_3|}{|\vec{OA}_0|} = \cos \gamma.$$



Hình 3.20

Vì  $|\vec{OA}_0| = 1$  nên  $|\vec{OA}_1| = \cos \alpha, |\vec{OA}_2| = \cos \beta, |\vec{OA}_3| = \cos \gamma$ .

Ta có  $\vec{OA}_0 = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$ , ta suy ra :  $\vec{OA}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$

hay  $\vec{OA}_0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ .

Vì  $\vec{OA}_0 = \vec{a}_0$  mà  $|\vec{a}_0| = 1$  nên ta có :  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

$$3.10. a) \text{ Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} \quad (1)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} = \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) = \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} \quad (2)$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} \quad (3)$$

Lấy (1) + (2) + (3) ta có hệ thức cần chứng minh là :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0.$$

b) Từ hệ thức trên ta suy ra định lí : “Nếu tứ diện ABCD có  $AB \perp CD, AC \perp DB$ , nghĩa là  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$  và  $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = 0$  thì  $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$  và do đó  $AD \perp BC$ .”

$$3.11. a) \vec{a} \cdot \vec{b} = 6(1 - c); \quad b) \vec{a} \cdot \vec{b} = -21; \quad c) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$3.12. a) |\vec{AB}| = 3; \quad b) |\vec{AB}| = 5.$$

$$3.13. \text{ Ta có : } \vec{AB} = (-a; b; 0)$$

$$\text{và } \vec{AC} = (-a; 0; c).$$

Vì  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2 > 0$  nên góc  $\widehat{BAC}$  là góc nhọn.

Lập luận tương tự ta chứng minh được các góc  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$  cũng là góc nhọn.

3.14. a)  $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$ ;

b)  $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 36$ ;

c)  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$ .

3.15. a) Tâm  $I(3; -1; 8)$ , bán kính  $r = 10$ ;

b) Tâm  $I(-2; 1; 3)$ , bán kính  $r = 8$ .

3.16. Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ .

Vì  $A \in (S)$  nên ta có:  $1 - 2a + d = 0$  (1)

$B \in (S)$  nên ta có:  $4 + 4b + d = 0$  (2)

$C \in (S)$  nên ta có:  $16 - 8c + d = 0$  (3)

$O \in (S)$  nên ta có:  $d = 0$  (4)

Giải hệ 4 phương trình trên ta có:  $d = 0, a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 2$ .

Vậy mặt cầu (S) cần tìm có phương trình là:  $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$ .

Phương trình mặt cầu (S) có thể viết dưới dạng:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - \frac{1}{4} - 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm  $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$  và có bán kính  $r = \frac{\sqrt{21}}{2}$ .

## §2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

3.17. a) Phương trình  $(\alpha)$  có dạng:  $(x-2) + (y) + (z-1) = 0$  hay  $x + y + z - 3 = 0$ .

b) Hai vectơ có giá song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  là:  $\vec{u} = (0; 1; 1)$  và  $\vec{v} = (-1; 0; 2)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (2; -1; 1)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $A(1; 0; 0)$  và nhận  $\vec{n} = (2; -1; 1)$  là vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là:  $2(x-1) - y + z = 0$  hay  $2x - y + z - 2 = 0$ .

c) Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là:  $\overrightarrow{MN} = (3; 2; 1)$

và  $\overrightarrow{MP} = (4; 1; 0)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = (-1; 4; -5)$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là:  $-1(x-1) + 4(y-1) - 5(z-1) = 0$  hay  $x - 4y + 5z - 2 = 0$ .

**3.18.** Đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm là  $I(2; 2; 3)$ .

Mặt phẳng trung trực của đoạn  $AB$  đi qua  $I$  và có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = \overrightarrow{IB} = (1; 4; -1)$ .  
Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn  $AB$  là :

$$1(x-2) + 4(y-2) - 1(z-3) = 0 \text{ hay } x + 4y - z - 7 = 0.$$

**3.19. a)** Ta có :  $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$  và  $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1)$ , suy ra  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4; 4; 4)$ .

Do đó  $(ABC)$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (4; 4; 4)$  hoặc  $\vec{n}' = (1; 1; 1)$ .

Suy ra phương trình của  $(ABC)$  là :  $(x-5) + (y-1) + (z-3) = 0$  hay  $x + y + z - 9 = 0$ .

**b)** Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $D$  và song song với mặt phẳng  $(ABC)$  nên  $(\alpha)$  cũng có vector pháp tuyến là  $\vec{n}' = (1; 1; 1)$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $(x-4) + (y) + (z-6) = 0$  hay  $x + y + z - 10 = 0$ .

**3.20.** Mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với mặt phẳng  $(\beta)$  :  $x + y + 2z - 7 = 0$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  có dạng :  $x + y + 2z + D = 0$ .

$(\alpha)$  đi qua gốc toạ độ  $O(0; 0; 0)$  suy ra  $D = 0$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là  $x + y + 2z = 0$ .

**3.21.** Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $A, B$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\beta)$  :  $x + 2y - z = 0$ .

Vậy hai vector có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là  $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$  và  $\vec{n}_\beta = (1; 2; -1)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vector pháp tuyến là :  $\vec{n}_\alpha = (-4; 3; 2)$ .

Vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $-4(x) + 3(y-1) + 2(z) = 0$  hay  $4x - 3y - 2z + 3 = 0$ .

$$3.22. (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{-1}{B} = \frac{3}{6} \neq \frac{2}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2. \end{cases}$$

$$3.23. a) d(M, (\alpha)) = \frac{|1+4+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$b) d(M, (\beta)) = \frac{|3+25|}{\sqrt{9+16}} = \frac{28}{5}.$$

$$c) d(M, (\gamma)) = \frac{|5|}{\sqrt{1}} = 5.$$

**3.24.** Xét điểm  $M(x; y; z)$ . Ta có :  $M$  cách đều hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d(M, (\alpha)) &= d(M, (\beta)) \Leftrightarrow \frac{|3x-y+4z+2|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{|3x-y+4z+8|}{\sqrt{9+1+16}} \\ &\Leftrightarrow 3x - y + 4z + 5 = 0. \end{aligned}$$

3.25. Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ là :

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0),$$

$$B'(1; 0; 1), D'(0; 1; 1), C'(1; 1; 1).$$

a) Phương trình của hai mặt phẳng  $(AB'D')$  và  $(BC'D)$  là :  $x + y - z = 0$  và  $x + y - z - 1 = 0$ .

Ta có :  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$ . Vậy  $(AB'D') \parallel (BC'D)$ .

$$b) d((AB'D'), (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3.26. Mặt phẳng  $(\alpha)$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(\beta)$  và  $(\gamma)$ , do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là  $\vec{n}_\beta = (3; -2; 2)$  và  $\vec{n}_\gamma = (5; -4; 3)$

$$\text{Suy ra } \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \wedge \vec{n}_\gamma = (2; 1; -2).$$

Mặt khác  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(3; -1; -5)$  và có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_\alpha$ , vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $2(x - 3) + 1(y + 1) - 2(z + 5) = 0$  hay  $2x + y - 2z - 15 = 0$ .

3.27. Hình chiếu của điểm  $A(2; 3; 4)$  lên các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt là  $B(2; 0; 0), C(0; 3; 0), D(0; 0; 4)$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua ba điểm  $B, C, D$  nên  $(\alpha)$  có phương trình theo đoạn chắn là :  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  hay  $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ .

3.28. a)  $(\alpha_1) \parallel (\alpha'_1)$  ;      b)  $(\alpha_2)$  cắt  $(\alpha'_2)$  ;      c)  $(\alpha_3)$  trùng với  $(\alpha'_3)$ .

3.29. Mặt phẳng  $(\beta)$  song song với trục  $Oy$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  :  $2x - y + 3z + 4 = 0$ , do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\beta)$  là :  $\vec{j} = (0; 1; 0)$  và  $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 3)$ .

$$\text{Suy ra } (\beta) \text{ có vectơ pháp tuyến là } \vec{n}_\beta = \vec{j} \wedge \vec{n}_\alpha = (3; 0; -2).$$

$$\text{Mặt phẳng } (\beta) \text{ đi qua điểm } M(2; -1; 2) \text{ có vectơ pháp tuyến là : } \vec{n}_\beta = (3; 0; -2).$$

$$\text{Vậy phương trình của } (\beta) \text{ là : } 3(x - 2) - 2(z - 2) = 0 \text{ hay } 3x - 2z - 2 = 0.$$

3.30. Gọi giao điểm của  $(\alpha)$  với ba tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt là  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$  ( $a, b, c > 0$ ).

$$\text{Mặt phẳng } (\alpha) \text{ có phương trình theo đoạn chắn là : } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Do } (\alpha) \text{ đi qua } M(1; 2; 3) \text{ nên ta thay tọa độ của điểm } M \text{ vào (1) : } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

Thể tích của tứ diện  $OABC$  là  $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc$ .

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :  $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27.6}{abc}$   
 $\Rightarrow abc \geq 27.6 \Rightarrow V \geq 27$ .

Ta có :  $V$  đạt giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9. \end{cases}$

Vậy phương trình mặt phẳng ( $\alpha$ ) thỏa mãn đề bài là :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \text{ hay } 6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

### §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

3.31. a) Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1 ; 2 ; 3)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (3 ; 3 ; 1)$  là :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của  $\Delta$  là  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ .

b)  $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow u_{\Delta} = u_{\alpha} = (2 ; -1 ; 1)$

Phương trình tham số của  $\Delta$  là  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của  $\Delta$  là  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ .

c)  $\Delta$  đi qua hai điểm  $C$  và  $D$  nên có vectơ chỉ phương  $\overrightarrow{CD} = (1 ; 2 ; 3)$ .

Vậy phương trình tham số của  $\Delta$  là  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của  $\Delta$  là  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$ .

**3.32.** Gọi  $A$  và  $B$  lần lượt là giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$  với  $(\alpha)$ . Đường thẳng  $\Delta$  cần tìm chính là đường thẳng  $AB$  (h.3.21).

Ta có  $A(1-t; t; 4t) \in d_1$

$$A \in (\alpha) \Leftrightarrow t + 4.(2t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Suy ra  $A(1; 0; 0)$ .

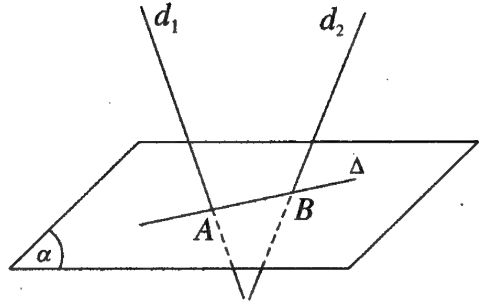
Ta có  $B(2-t'; 4+2t'; 4) \in d_2$

$$B \in (\alpha) \Leftrightarrow 4 + 2t' + 8 = 0 \Leftrightarrow t' = -6.$$

Suy ra  $B(8; -8; 4)$ .

$\Delta$  đi qua  $A, B$  nên có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (7; -8; 4)$ .

Phương trình chính tắc của  $\Delta$  là:  $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$ .



Hình 3.21

**3.33. a)** Ta có  $\vec{a}_d = (1; 2; 3)$  và  $\vec{a}_{d'} = (3; 2; 2)$ .

Suy ra  $\vec{n} = \vec{a}_d \wedge \vec{a}_{d'} = (-2; 7; -4)$ .

Ta có  $M_0(-1; 1; -2) \in d, M'_0(1; 5; 4) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'_0} = (2; 4; 6)$ .

Ta có  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M'_0} = -4 + 28 - 24 = 0$ . Vậy đường thẳng  $d$  và  $d'$  đồng phẳng và khác phương, nên  $d$  và  $d'$  cắt nhau.

**b)** Ta có  $\vec{a}_d = (1; 1; -1)$  và  $\vec{a}_{d'} = (2; 2; -2), M_0(0; 1; 2) \in d$ .

$$\forall \begin{cases} \vec{a}_{d'} = 2\vec{a}_d \\ M_0 \notin d' \text{ (toạ độ } M_0 \text{ không thoả mãn } d') \end{cases}$$

nên hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  song song.

**c)**  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_d = (-1; 3; -2)$ ,

$d'$  có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_{d'} = (0; 0; 5)$ .

Gọi  $\vec{n} = \vec{a}_d \wedge \vec{a}_{d'} = (15; 5; 0) \neq \vec{0}$ .

Ta có  $M_0(0; 0; -1) \in d$

$$M'_0(0; 9; 0) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'_0} = (0; 9; 1), \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M'_0} = 45 \neq 0.$$

Vậy  $d$  và  $d'$  là hai đường thẳng chéo nhau.





3.38. a) Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta$  và song song với  $\Delta'$ . Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là:  $\vec{a} = (1; -1; 0)$  và  $\vec{a}' = (-1; 1; 1)$ . Suy ra  $\vec{n}_\alpha = (-1; -1; 0)$  (h.3.23).

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M_1(1; -1; 1)$  thuộc  $\Delta$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}'_\alpha = (1; 1; 0)$ .

Vậy phương trình của mặt phẳng  $(\alpha)$  có dạng  $x - 1 + y + 1 = 0$  hay  $x + y = 0$ .

Ta có:  $M_2(2; 2; 0)$  thuộc đường thẳng  $\Delta'$ .

$$d(\Delta, \Delta') = d(M_2, (\alpha)) = \frac{|2+2|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}.$$

b) Hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$  có phương trình là  $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$  và  $\Delta' : \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t' \end{cases}$ .

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $\Delta$  và song song với  $\Delta'$  là  $9x + 5y - 2z - 22 = 0$ .

Lấy điểm  $M'(0; 2; 0)$  trên  $\Delta'$ .

$$\text{Ta có } d(\Delta, \Delta') = d(M', (\alpha)) = \frac{|5 \cdot (2) - 22|}{\sqrt{81 + 25 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{110}}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng  $\Delta$  và  $\Delta'$  là  $\frac{12}{\sqrt{110}}$ .

3.39. a)  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(1; -3; 4)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a} = (2; 1; -2)$

$\Delta'$  đi qua điểm  $M'_0(-2; 1; -1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}' = (-4; -2; 4)$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{a}' = -2\vec{a} \\ M'_0 \notin \Delta' \end{cases}$$

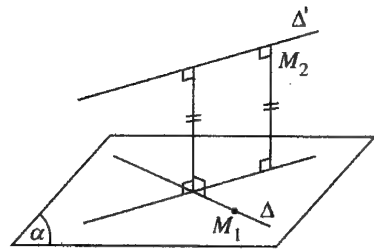
Vậy  $\Delta'$  song song với  $\Delta$  (h.3.24).

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{M_0M'_0} = (-3; 4; -5)$$

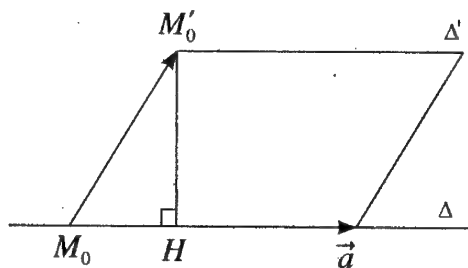
$$\vec{a} = (2; 1; -2).$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_0M'_0} \wedge \vec{a} = (-3; -16; -11).$$

$$d(\Delta, \Delta') = M'_0H = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{9+256+121}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{386}}{3}.$$



Hình 3.23



Hình 3.24

3.40. a) Phương trình tham số của  $\Delta$  : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$$

Xét điểm  $H(1 + 2t; -1 - t; 2t) \in \Delta$ .

Ta có  $\overrightarrow{MH} = (2t - 1; -t; 2t - 1)$

$$\vec{a}_\Delta = (2; -1; 2).$$

$H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{a}_\Delta = 0$ .

$$\Leftrightarrow 2(2t - 1) + t + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{9} \text{ (h.3.25).}$$

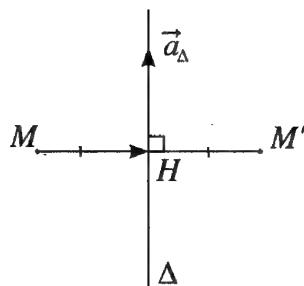
Ta suy ra tọa độ điểm  $H\left(\frac{17}{9}; \frac{-13}{9}; \frac{8}{9}\right)$ .

b)  $H$  là trung điểm của  $MM'$ , suy ra  $x_{M'} + x_M = 2x_H$ .

$$\text{Suy ra } x_{M'} = 2x_H - x_M = \frac{34}{9} - 2 = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Tương tự, ta được } y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{-26}{9} + 1 = \frac{-17}{9}, z_{M'} = 2z_H - z_M = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Vậy } M'\left(\frac{16}{9}; \frac{-17}{9}; \frac{7}{9}\right).$$



Hình 3.25

3.41. a) Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(1; -1; 2)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y + 2z + 12 = 0$  là

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

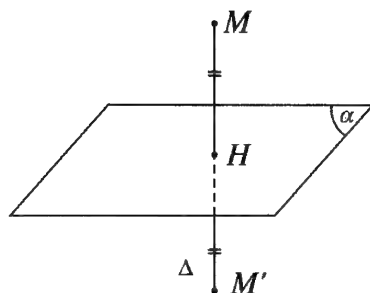
Xét điểm  $H(1 + 2t; -1 - t; 2 + 2t) \in \Delta$  (h.3.26).

Ta có  $H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + (-1 - t) + 2(2 + 2t) + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-19}{9}.$$

$$\text{Vậy ta được } H\left(\frac{-29}{9}; \frac{10}{9}; \frac{-20}{9}\right).$$

b)  $H$  là trung điểm của  $MM'$ , suy ra  $x_{M'} = 2x_H - x_M = \frac{-58}{9} - 1 = \frac{-67}{9}$



Hình 3.26

$$y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{20}{9} + 1 = \frac{29}{9}$$

$$z_{M'} = 2z_H - z_M = \frac{-40}{9} - 2 = \frac{-58}{9}.$$

Vậy ta được  $M' \left( \frac{-67}{9}; \frac{29}{9}; \frac{-58}{9} \right)$ .

3.42. Phương trình tham số của đường thẳng  $d$ : 
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t. \end{cases}$$

Vectơ chỉ phương của hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  lần lượt là  $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ ,  $\vec{a}' = (1; -2; 0)$ .

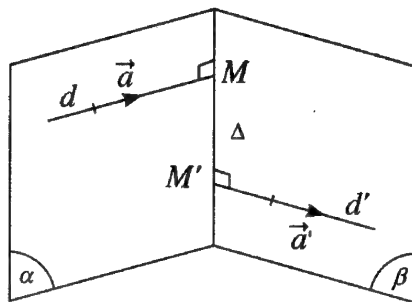
Xét điểm  $M(1 - t; 2 + 2t; 3t)$  trên  $d$  và điểm  $M'(1 + t'; 3 - 2t'; 1)$  trên  $d'$  ta có  $\overrightarrow{MM'} = (t' + t; 1 - 2t' - 2t; 1 - 3t)$ .

$MM'$  là đường vuông góc chung của  $d$  và  $d'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{a}' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t' - t + 2 - 4t' - 4t + 3 - 9t = 0 \\ t' + t - 2 + 4t' + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t' + 14t = 5 \\ 5t' + 5t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t' = \frac{1}{15} \end{cases} \quad (\text{h.3.27}).$$



Hình 3.27

Thay giá trị của  $t$  và  $t'$  vào ta được tọa độ của  $M$  và  $M'$  là  $M \left( \frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 1 \right)$ ,  $M' \left( \frac{16}{15}; \frac{43}{15}; 1 \right)$ .

Do đó  $\overrightarrow{MM'} = \left( \frac{6}{15}; \frac{3}{15}; 0 \right)$ .

Suy ra đường vuông góc chung  $\Delta$  của  $d$  và  $d'$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; 1; 0)$ .

Vậy phương trình tham số của  $\Delta$  là

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + 2t \\ y = \frac{8}{3} + t \\ z = 1. \end{cases}$$

3.43. Ta chọn hệ trục tọa độ như sau :

$C$  là gốc tọa độ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{i}$ ;  $\overrightarrow{CB} = \vec{j}$ ;  $\overrightarrow{CC'} = \vec{k}$ .

Trong hệ tọa độ vừa chọn ta có

$C(0; 0; 0)$ ,  $A'(a; a; a)$ ,  $D(a; 0; 0)$ ,  $D'(a; 0; a)$ .

$\overrightarrow{CA'} = (a; a; a)$ ,  $\overrightarrow{DD'} = (0; 0; a)$ .

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $\overrightarrow{CA'}$  và song song với  $\overrightarrow{DD'}$ .  $(\alpha)$  có vector pháp tuyến là :

$$\vec{n} = \overrightarrow{CA'} \wedge \overrightarrow{DD'} = (a^2; -a^2; 0)$$

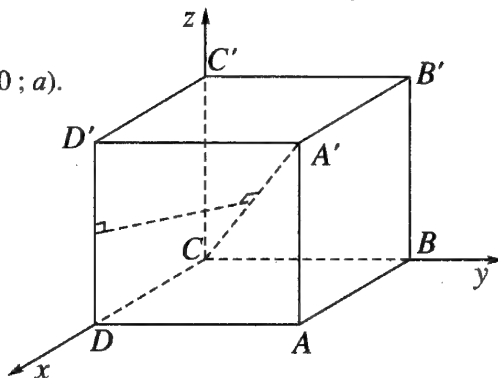
hay  $\vec{n}' = (1; -1; 0)$ .

Phương trình tổng quát của  $(\alpha)$  là

$x - y = 0$  (h.3.28).

Ta có :  $d(CA', DD') = d(D, (\alpha)) = \frac{|-a|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CA'$  và  $DD'$  là  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Hình 3.28

3.44. Phương trình tham số của đường thẳng  $d$  : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$$

Xét phương trình  $2(1 + 2t) + (t) + (-2 - 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ .

Vậy đường thẳng  $d$  cắt mặt phẳng  $(\alpha)$  tại điểm  $M \left( 2; \frac{1}{2}; -\frac{7}{2} \right)$  (h.3.29).

Ta có vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  và vector chỉ phương của đường thẳng  $d$  lần lượt là

$$\vec{n}_\alpha = (2; 1; 1)$$

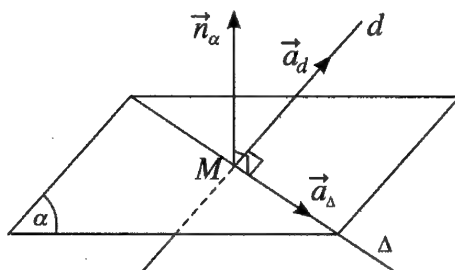
$$\text{và } \vec{a}_d = (2; 1; -3).$$

Gọi  $\vec{a}_\Delta$  là vector pháp tuyến của  $\Delta$ ,

ta có  $\vec{a}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha$  và  $\vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_d$ .

Suy ra  $\vec{a}_\Delta = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{a}_d = (-4; 8; 0)$

hay  $\vec{a}_\Delta = (1; -2; 0)$ .



Hình 3.29

Vậy phương trình tham số của  $\Delta$  là 
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{1}{2} - 2t \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

3.45. a) Ta có  $\vec{a}_{d_1} = (2; -3; 4)$  và  $\vec{a}_{d_2} = (3; 2; -2)$

$$\vec{n} = \vec{a}_{d_1} \wedge \vec{a}_{d_2} = (-2; 16; 13).$$

Lấy điểm  $M_1(1; -2; 5)$  trên  $d_1$  và điểm  $M_2(7; 2; 1)$  trên  $d_2$  (h.3.30).

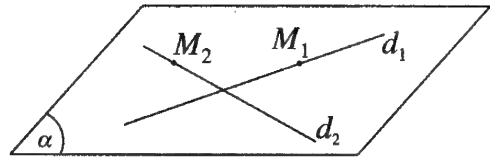
Ta có  $\overrightarrow{M_1M_2} = (6; 4; -4)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -12 + 64 - 52 = 0.$$

Suy ra  $d_1$  và  $d_2$  cùng nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ .

b) Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $M_1$  và có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}$ , vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :

$$-2(x - 1) + 16(y + 2) + 13(z - 5) = 0 \text{ hay } 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$



Hình 3.30

### BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.46. a) Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta_1$  : 
$$\begin{cases} x = 2t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 4t' \end{cases}$$

$\Delta_1$  đi qua điểm  $M_1(0; -2; 0)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_1 = (2; 3; 4)$

$\Delta_2$  đi qua điểm  $M_2(1; 2; 1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{a}_2 = (1; 1; 2)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (2; 0; -1)$ .

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M_1(0; -2; 0)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}$ , vậy phương trình của  $(\alpha)$  là :  $2x - z = 0$ .

b) Xét điểm  $H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t) \in \Delta_2$

$$\overrightarrow{MH} = (t - 1; t + 1; 2t - 3).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } MH \text{ phỉu nhấ} \Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{a}_2 = 0 \Leftrightarrow t - 1 + t + 1 + 2(2t - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Vậy ta được  $H(2; 3; 3)$ .

3.47. Mặt phẳng  $(A'BD)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_1 = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA'} = (ab; ab; a^2)$ .

Mặt phẳng  $(BDM)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_2 = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BM} = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$ .

Ta có  $(BDM) \perp (A'BD) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$ .

3.48. 
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (0; 6; 0) \\ A(2; 0; 0) \end{cases} \Rightarrow C(2; 6; 0).$$

Do đó  $I(1; 3; 4)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $I$  và vuông góc với  $OA$  là:  $x - 1 = 0$ ,  $(\alpha)$  cắt  $OA$  tại  $K(1; 0; 0)$ .

Khoảng cách từ  $I$  đến  $OA$  là:  $IK = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$ .

3.49. Ta có  $\vec{n}_\beta = (1; 3k; -1)$  và  $\vec{n}_\gamma = (k; -1; 1)$ . Gọi  $d_k = \beta \cap \gamma$ .

Đường thẳng  $d_k$  vuông góc với giá của  $\vec{n}_\beta$  và  $\vec{n}_\gamma$  nên có vectơ chỉ phương là:

$$\vec{a} = \vec{n}_\beta \wedge \vec{n}_\gamma = (3k - 1; -k - 1; -1 - 3k^2).$$

Ta có:  $d_k \perp (\alpha) \Leftrightarrow \frac{3k-1}{1} = \frac{-k-1}{-1} = \frac{-1-3k^2}{-2} \Leftrightarrow k = 1$ .

3.50. Ta có  $\vec{a}_d = (2; -1; 4)$ .

Xét điểm  $B(-3 + 2t; 1 - t; -1 + 4t)$ ,

$$\overrightarrow{AB} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t).$$

$$AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - (3 - t) + 4(-5 + 4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = (3; 2; -1)$ .

Vậy phương trình của  $\Delta$  là:  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$ .

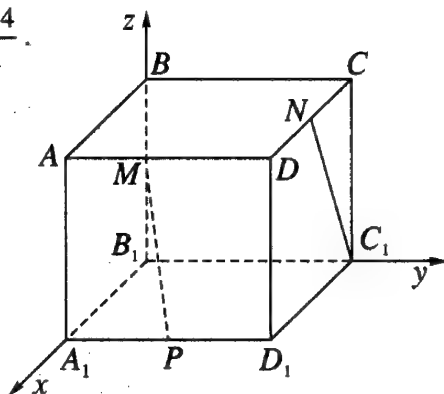
3.51. Ta chọn hệ trục tọa độ như sau:  $B_1$  là gốc

tọa độ,  $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{i}$ ,  $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{j}$ ,  $\overrightarrow{B_1B} = \vec{k}$ . Trong hệ trục vừa chọn, ta có

$$B_1(0; 0; 0), B(0; 0; 1), A_1(1; 0; 0),$$

$$D_1(1; 1; 0), C(0; 1; 1), D(1; 1; 1),$$

$$C_1(0; 1; 0) \text{ (h.3.31).}$$



Hình 3.31

Suy ra  $M(0; 0; \frac{1}{2})$ ,  $P(1; \frac{1}{2}; 0)$ ,  $N(\frac{1}{2}; 1; 1)$ .

Ta có  $\overrightarrow{MP} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ;  $\overrightarrow{C_1N} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ .

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $C_1N$  và song song với  $MP$ .  $(\alpha)$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$  hay  $\vec{n}' = (2; -5; -1)$ .

Phương trình của  $(\alpha)$  là  $2x - 5(y - 1) - z = 0$  hay  $2x - 5y - z + 5 = 0$ .

Ta có  $d(MP, C_1N) = d(M, (\alpha)) = \frac{\left|-\frac{1}{2} + 5\right|}{\sqrt{25 + 4 + 1}} = \frac{9}{2\sqrt{30}}$ .

Ta có  $\cos(\widehat{MP, C_1N}) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{C_1N}|}{|\overrightarrow{MP}| |\overrightarrow{C_1N}|} = 0$ . Vậy  $(\widehat{MP, C_1N}) = 90^\circ$ .

**3.52. a)** Ta có  $C(-2; 0; 0)$  và  $M(-1; 0; \sqrt{2})$ .

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $SA$  và song song với  $BM$ . Hai vector có giá song song hoặc nằm trên  $(\alpha)$  là  $\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$  và  $\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$ .

Suy ra vector pháp tuyến của  $(\alpha)$  là:  $\vec{n} = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$  hay  $\vec{n}' = (\sqrt{2}; 0; 1)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình:  $\sqrt{2}(x - 2) + z = 0$  hay  $\sqrt{2}x + z - 2\sqrt{2} = 0$ .

b) Ta có  $d(SA, BM) = d(B, (\alpha)) = \frac{|-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BM$  là  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

**3.53. a)** Đường thẳng  $AC$  có vector chỉ phương  $\overrightarrow{AC} = (0; 1; -3)$ .

Phương trình tham số của đường thẳng  $AC$ : 
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 11 - 3t. \end{cases}$$

b) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -1)$  và  $\overrightarrow{AC} = (0; 1; -3)$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-2; -3; -1)$ .

Suy ra  $(\alpha)$  có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (-2; -3; -1)$ .



Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình :  $2(x-1) + 3(y) + (z-11) = 0$  hay  $2x + 3y + z - 13 = 0$ .

c) Phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $D$  bán kính 5 :  $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$

$$\text{Ta có } d(D, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot (1) + (2) - 13|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} < 5$$

Do đó  $d(D, (\alpha)) < r$ . Vậy mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt mặt cầu  $(S)$ .

3.54. a)  $(S)$  có tâm  $I\left(-\frac{3}{2}; -2; \frac{5}{2}\right)$  và có bán kính  $r = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} - 6} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ .

$$\text{b) } d(I, (P)) = \frac{\left|2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - 5\right|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{8}{\sqrt{29}} < \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Vậy  $d(I, (P)) < r$ .

Suy ra mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo đường tròn tâm  $H$  bán kính  $r'$ .

$H$  chính là hình chiếu vuông góc của  $I$  xuống mặt phẳng  $(P)$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng qua  $I$  và vuông góc với  $(P)$ . Ta có vectơ chỉ phương của  $\Delta$  là  $\vec{a}_{\Delta} = \vec{n}_{(P)} = (2; -3; 4)$

$$\text{Phương trình tham số của } \Delta : \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = \frac{5}{2} + 4t. \end{cases}$$

$\Delta$  cắt  $(P)$  tại  $H\left(-\frac{3}{2} + 2t; -2 - 3t; \frac{5}{2} + 4t\right)$ . Ta có :

$$H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2\left(-\frac{3}{2} + 2t\right) - 3(-2 - 3t) + 4\left(\frac{5}{2} + 4t\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 29t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{29}.$$

$$\text{Suy ra tọa độ } H\left(-\frac{3}{2} - \frac{16}{29}; -2 + \frac{24}{29}; \frac{5}{2} - \frac{32}{29}\right) \text{ hay } H\left(\frac{119}{58}; \frac{-34}{29}; \frac{81}{58}\right).$$

$$\text{Ta có } r'^2 = r^2 - d^2(I, (P)) = \frac{26}{4} - \frac{64}{29} = \frac{249}{58}. \text{ Suy ra } r' = \sqrt{\frac{249}{58}}.$$

3.55. a) Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình :  $2x + y - z - 6 = 0$ .

$(\beta)$  đi qua  $O(0; 0; 0)$  và  $(\beta) \parallel (\alpha)$ , suy ra phương trình của  $(\beta)$  là  $2x + y - z = 0$ .

b) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $O$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$ , suy ra phương trình tham

$$\text{số của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t. \end{cases}$$

$$c) d(O, (\alpha)) = \frac{|-6|}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{6}.$$

3.56. a)  $D(3; 4; 5)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AD} = (0; 4; 5)$  và  $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; 0)$ .

Suy ra  $(ABD)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = (-20; -15; 12)$ .

Phương trình của mặt phẳng  $(ABD)$  có dạng

$$20(x-3) + 15y - 12z = 0 \text{ hay } 20x + 15y - 12z - 60 = 0.$$

b) Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $D$  và vuông góc với mặt phẳng

$$(ABD): \begin{cases} x = 3 + 20t \\ y = 4 + 15t \\ z = 5 - 12t. \end{cases}$$

3.57. Tâm  $I(x; y; z)$  của  $(S)$  có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 \\ (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 6y - 6z = 12 \\ 8x - 4y + 8z = 44 \\ 4x - 6y + 6z = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ 2x - 3y + 3z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3. \end{cases}$$

Vậy mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(2; -1; 3)$ .

Mặt phẳng  $(\alpha)$  tiếp xúc với  $(S)$  tại  $A$  nên  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\overrightarrow{IA} = (4; -1; 0)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  là  $4(x-6) - (y+2) = 0$  hay  $4x - y - 26 = 0$ .

3.58. a) Mặt phẳng  $(\alpha)$  có vectơ pháp tuyến là  $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$  hay  $\vec{n} = 3\overrightarrow{OC} = (1; 1; 1)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  là  $x + y + z = 0$ .

b) Gọi  $(\beta)$  là mặt phẳng chứa  $AB$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$ . Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên  $(\beta)$  là:  $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 1)$  và  $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$ .

Suy ra  $(\beta)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_\beta = (0; 1; -1)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  là  $y - z = 0$ .

3.59. a) Phương trình mặt cầu  $(S)$  có dạng  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ . (\*)

Thay tọa độ các điểm  $A, B, C, D$  vào (\*) ta có

$$\begin{cases} 1-2a+d=0 \\ 1-2b+d=0 \\ 1-2c+d=0 \\ 2-2a-2b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \\ d=0. \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:  $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$  và  $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$ .

Suy ra (ACD) có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-1; 0; -1)$  hay  $\vec{n}' = (1; 0; 1)$ .

Vậy phương trình của mặt phẳng (ACD) là  $x - 1 + z = 0$  hay  $x + z - 1 = 0$ .

Mặt cầu (S) có tâm là  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

Ta có  $I \in (ACD)$ , suy ra mặt phẳng (ACD) cắt (S) theo một đường tròn có tâm  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

và có bán kính  $r$  bằng bán kính mặt cầu (S), vậy

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

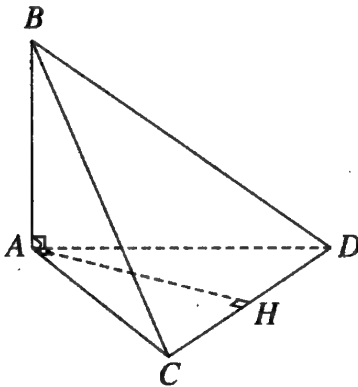
**3.60. a)** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4)$ ;  $\overrightarrow{AD} = (0; -2; 0)$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , suy ra  $AB \perp AC, AC \perp AD, AD \perp AB$ .

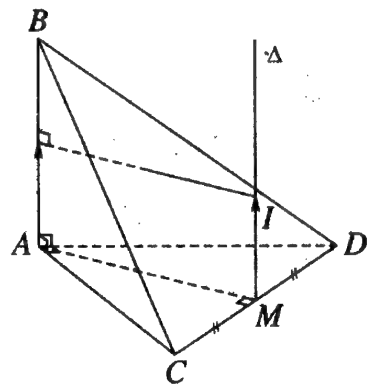
Vậy  $AB, AC, AD$  vuông góc với nhau từng đôi một.

b) Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $CD$ . Ta có  $AH$  chính là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  (h.3.32).

$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$ ;  $\overrightarrow{CD} = (0; -2; -4)$



Hình 3.32



Hình 3.33

Vector chỉ phương của đường thẳng  $AH$  là  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (0; -4; 2)$ .

Phương trình tham số của đường thẳng  $AH$  hay  $\Delta$  là 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Vẽ trục  $\Delta$  của đường tròn  $(ACD)$ , mặt phẳng trung trực của  $AB$  cắt  $\Delta$  tại  $I(a; b; c)$ . Ta có  $I$  là tâm của mặt cầu  $(S)$  ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  (h.3.33).

$$\text{Ta có } M(2; 3; 1), \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = -\frac{1}{2} \\ b - 3 = 0 \\ c - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 3 \\ c = 1. \end{cases}$$

$$(S) \text{ có bán kính } r = IA = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 4} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Vậy phương trình mặt cầu  $(S)$  ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  là:  $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = \frac{21}{4}$ .

d) Mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(ABD)$  nên có vector pháp tuyến là

$$\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4) \text{ hay } \vec{n} = (0; 0; 1).$$

Phương trình  $(\alpha)$  có dạng  $z + D = 0$ . Ta có:

$$(\alpha) \text{ tiếp xúc với } S(I, r) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = r \Leftrightarrow |1 + D| = \frac{\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{\sqrt{21}}{2} - 1 \\ D = -\frac{\sqrt{21}}{2} - 1. \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng  $(\alpha)$  thỏa mãn đề bài là  $(\alpha_1) : z + \frac{\sqrt{21}}{2} - 1 = 0$

$$\text{và } (\alpha_2) : z - \frac{\sqrt{21}}{2} - 1 = 0.$$

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 3.61 (B) | 3.65 (D) | 3.69 (B) | 3.73 (C) | 3.77 (C) | 3.81 (C) |
| 3.62 (A) | 3.66 (B) | 3.70 (C) | 3.74 (D) | 3.78 (B) | 3.82 (A) |
| 3.63 (C) | 3.67 (A) | 3.71 (B) | 3.75 (C) | 3.79 (B) | 3.83 (A) |
| 3.64 (A) | 3.68 (A) | 3.72 (A) | 3.76 (A) | 3.80 (D) | 3.84 (A) |
|          |          |          |          |          | 3.85 (B) |

## BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

### I. ĐỀ BÀI

1. Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

a) Tính tỉ số  $\frac{V_{ACA'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}}$  ;

b) Tính  $V_{ACA'B'}$  biết rằng tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng  $a$ ,  $AA' = b$  và  $AA'$  tạo với  $(ABC)$  một góc bằng  $60^\circ$ .

2. Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AD = BC = a$ ,  $BD = CA = b$ ,  $CD = AB = c$ .

a) Chứng minh rằng các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện đồng quy và đôi một vuông góc với nhau ;

b) Tính  $V_{ABCD}$  theo  $a, b, c$  ;

c) Chứng minh rằng  $O$  là tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp của tứ diện  $ABCD$ . Tính bán kính của các mặt cầu đó theo  $a, b, c$ .

3. Cho hình nón tròn xoay  $(H)$  đỉnh  $S$ , đáy là hình tròn bán kính  $R$ , chiều cao bằng  $h$ . Gọi  $(H')$  là hình trụ tròn xoay có đáy là hình tròn bán kính  $r$  ( $0 < r < R$ ) nội tiếp  $(H)$ .

a) Tính tỉ số thể tích của  $(H')$  và  $(H)$  ;

b) Xác định  $r$  để  $(H')$  có thể tích lớn nhất.

4. Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  với  $A(0 ; 0 ; 0)$ ,  $B(1 ; 0 ; 0)$ ,  $D(0 ; 1 ; 0)$ ,  $A'(0 ; 0 ; 1)$ .

a) Hãy tìm toạ độ các đỉnh còn lại ;

b) Chứng minh  $A'C \perp (BC'D)$  ;

c) Tìm toạ độ của chân đường vuông góc chung của  $B'D'$  và  $BC'$ .

5. Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $S(0 ; 0 ; 2)$ ,  $A(0 ; 0 ; 0)$ ,  $B(1 ; 2 ; 0)$ ,  $C(0 ; 2 ; 0)$ .

a) Viết phương trình của mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$  và vuông góc với  $SB$  ;

b) Tìm toạ độ của các điểm  $B'$  là giao của  $(P)$  với đường thẳng  $SB$ ,  $C'$  là giao của  $(P)$  với đường thẳng  $SC$  ;

c) Tính thể tích tứ diện  $SAB'C'$  ;

d) Tìm điểm đối xứng với  $B$  qua mặt phẳng  $(P)$  ;

e) Chứng minh các điểm  $A, B, C, B', C'$  cùng thuộc một mặt cầu. Viết phương trình của mặt cầu đó và phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu đó tại  $C'$ .

6. Cho hình chóp ngũ giác  $S.ABCDE$ . Gọi  $A', B', C', D', E'$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC, SD, SE$ . Khi đó  $\frac{V_{S.A'B'C'D'E'}}{V_{S.ABCDE}}$  bằng :

- (A)  $\frac{1}{2}$  ;      (B)  $\frac{1}{5}$  ;      (C)  $\frac{1}{8}$  ;      (D)  $\frac{1}{32}$ .

7. Thể tích hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh  $a$  bằng :

- (A)  $\frac{\pi a^3}{9}$  ;      (B)  $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{18}$  ;      (C)  $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{18}$  ;      (D)  $\frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$ .

8. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Khi đó thể tích hình chóp  $A.A'BCD'$  bằng :

- (A)  $\frac{a^3}{2}$  ;      (B)  $\frac{a^3}{3}$  ;      (C)  $\frac{a^3}{4}$  ;      (D)  $\frac{a^3}{6}$ .

9. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $(H)$  là hình nón tròn xoay nội tiếp hình lập phương đó. Khi đó  $\frac{V_{(H)}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$  bằng :

- (A)  $\frac{1}{3}$  ;      (B)  $\frac{\pi}{6}$  ;      (C)  $\frac{\pi}{8}$  ;      (D)  $\frac{\pi}{12}$ .

10. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $(H)$  là hình trụ tròn xoay ngoại tiếp hình lập phương đó. Khi đó  $\frac{V_{(H)}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$  bằng :

- (A)  $\frac{3}{2}$  ;      (B)  $\frac{\pi}{2}$  ;      (C)  $\frac{\pi}{3}$  ;      (D)  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

11. Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $(H)$  là hình cầu nội tiếp hình lập phương đó. Khi đó  $\frac{V_{(H)}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$  bằng :

- (A)  $\frac{\pi}{6}$  ;      (B)  $\frac{\pi}{4}$  ;      (C)  $\frac{\pi}{3}$  ;      (D)  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

Các bài tập dưới đây cho trong không gian Oxyz.

12. Cho  $A(0 ; 0 ; a)$ ,  $B(b ; 0 ; 0)$ ,  $C(0 ; c ; 0)$ . Khi đó phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là :

(A)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 ;$

(C)  $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} = 1 ;$

(B)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1 ;$

(D)  $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1.$

13. Cho ba mặt phẳng  $(P) : 2x + y + z + 3 = 0$ ,

$(Q) : x - y - z - 1 = 0$ ,

$(R) : y - z + 2 = 0.$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai* ?

(A) Không có điểm nào cùng thuộc ba mặt phẳng trên ;

(B)  $(P) \perp (Q)$  ;

(C)  $(P) \perp (R)$  ;

(D)  $(Q) \perp (R).$

14. Cho hai đường thẳng  $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  và  $d_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A)  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau ;

(C)  $d_1$  và  $d_2$  song song ;

(B)  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau ;

(D)  $d_1$  và  $d_2$  trùng nhau.

15. Cho đường thẳng  $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$  và hai mặt phẳng

$(P) : x - y + z + 1 = 0$  và  $(Q) : 2x + y - z - 4 = 0.$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A)  $d \parallel (P)$  ;

(C)  $d = (P) \cap (Q)$  ;

(B)  $d \parallel (Q)$  ;

(D)  $d \perp (P).$

## II. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

1. a) Ta có  $V_{ACA'B'} = V_{B'.ACA'} = V_{B'.CA'C'}$   

$$= V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \quad (\text{h.1}).$$

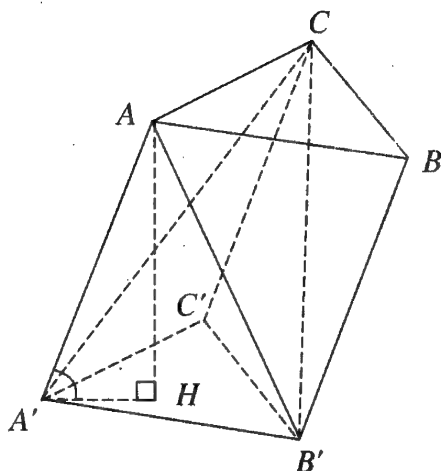
Từ đó suy ra tỉ số phải tìm bằng  $\frac{1}{3}$ .

b) Gọi  $H$  là chân đường cao đi qua  $A$  của lăng trụ. Khi đó góc  $(AH, A'A) = 60^\circ$ . Từ đó suy ra

$$AH = b \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Ta cũng có: } S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} a^2 b.$$

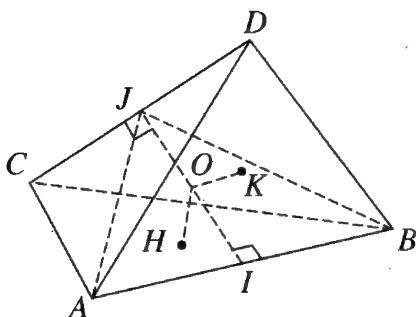
$$\text{Từ đó suy ra } V_{ACA'B'} = \frac{1}{8} a^2 b.$$



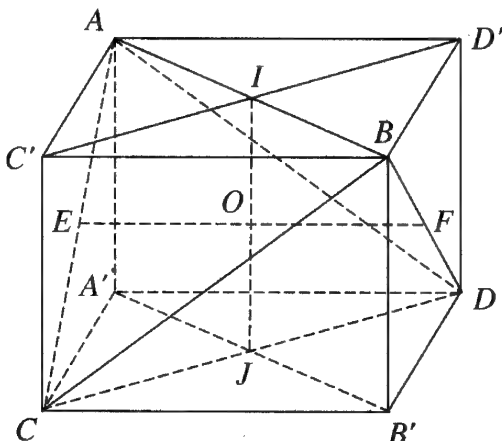
Hình 1

2. a) Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Vì  $\triangle ACD = \triangle BDC$  nên các trung tuyến tương ứng của chúng bằng nhau, do đó  $AJ = BJ$ . Từ đó suy ra  $JI \perp AB$ . Tương tự,  $IJ \perp CD$ . Vậy  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$ .

Làm tương tự đối với các cặp cạnh đối diện khác ta chứng minh được rằng đường nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện là đường vuông góc chung của cặp cạnh đó. Do đó các đường đó đồng quy tại  $O$  là trung điểm của mỗi đường (h.2)



Hình 2



Hình 3

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $AB$  và song song với  $CD$ ,  $(Q)$  là mặt phẳng qua  $CD$  và song song với  $AB$ ;  $A', B'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A, B$  lên  $(Q)$ ;  $C', D'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $C, D$  lên  $(P)$ . Dễ thấy  $AC'BD'.A'CB'D$  là hình hộp chữ nhật. Đường nối hai tâm của mỗi cặp mặt đối diện của hình hộp chữ nhật đó chính là đường



vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện của tứ diện  $ABCD$ . Do đó chúng đôi một vuông góc với nhau (h.3).

b) Đặt  $AC' = x, AD' = y, AA' = z$ . Ta có :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \\ y^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ z^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{AC'BD'.A'CB'D} = \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$ .

c) Ta có  $O$  là tâm của hình hộp chữ nhật  $AC'BD'.A'CB'D$  nên nó là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  là

$$r = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{8}$$

Gọi  $H$  và  $K$  theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ  $O$  đến  $(ABC)$  và  $(ABD)$  (xem h.2). Vì  $OA = OB = OC$  nên  $HA = HB = HC$ , tương tự  $KA = KB = KD$ . Vì  $\triangle ABD = \triangle BAC$  nên  $HA = KA$ . Do đó  $OH = OK$ . Tương tự, ta chứng minh được khoảng cách từ  $O$  đến các mặt của tứ diện  $ABCD$  bằng nhau nên  $O$  cũng là tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện  $ABCD$ .

Gọi  $r'$  là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện  $ABCD$ .

Khi đó ta có  $V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OBCD} + V_{OCDA} + V_{ODAB} = 4V_{OABC} = \frac{4}{3} r' S_{ABC}$ .

Do đó  $r' = \frac{3 V_{ABCD}}{4 S_{ABC}} = \frac{1}{16} \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ ,

trong đó  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

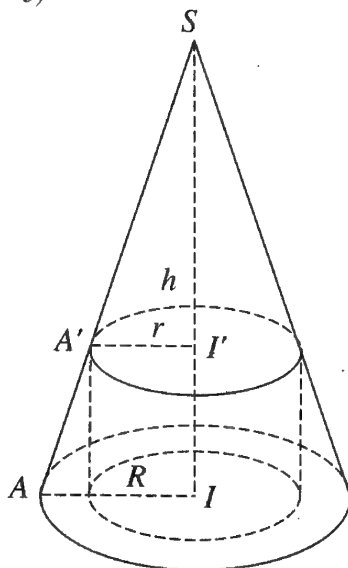
3. Giả sử đường cao  $SI$  của hình nón  $(H)$  cắt hai đáy của hình trụ  $(H')$  tại  $I$  và  $I'$  (h.4).

Khi đó  $\frac{r}{R} = \frac{SI'}{h}$ . Do đó  $\frac{R-r}{R} = \frac{h-SI'}{h} = \frac{I'I}{h}$ .

Từ đó suy ra  $I'I = \frac{h(R-r)}{R}$ .

$V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ ,  $V_{(H')} = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{h(R-r)}{R}$ .

Do đó  $\frac{V_{(H')}}{V_{(H)}} = \frac{r^2(R-r)}{R^3}$ .



Hình 4

b)  $V_{(H')}$  lớn nhất khi  $f(r) = r^2(R-r)$  (với  $0 < r < R$ ) là lớn nhất. Khảo sát hàm số  $f(r)$ , với  $0 < r < R$ . Ta có  $f'(r) = 2Rr - 3r^2 = 0$ , khi  $r = 0$  (loại), hoặc  $r = \frac{2R}{3}$ . Lập bảng biến thiên ta thấy  $f$  đạt cực đại tại  $r = \frac{2R}{3}$ . Khi đó  $V_{(H')} = \frac{4}{81}\pi R^2 h$ .

4. a) Để thấy  $C(1; 1; 0), B'(1; 0; 1), D'(0; 1; 1), C'(1; 1; 1), D'(0; 1; 1)$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)$ ,

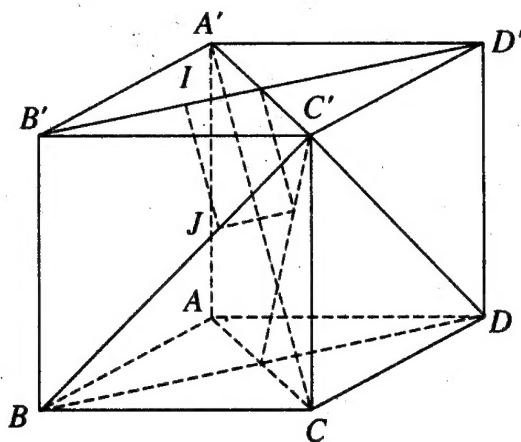
$$\overrightarrow{BC'} = (0; 1; 1),$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'} = (-1; 1; 0),$$

do đó  $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0$  và  $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

Từ đó suy ra  $A'C \perp (BC'D)$ .

c) Gọi  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $B'D'$  và  $BC'$ ,  $\vec{n}_1$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  qua  $B'D'$  và song song với  $A'C$ ,  $\vec{n}_2$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(Q)$  qua  $BC'$  và song song với  $A'C$  (h.5).



Hình 5

Khi đó  $\vec{n}_1 = \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{B'D'} = (1; 1; 2)$ ,  $\vec{n}_2 = \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{BC'} = (2; -1; 1)$ .

Phương trình của  $(P)$  là:  $(x-1) + y + 2(z-1) = 0$  hay  $x + y + 2z - 3 = 0$ .

Phương trình của  $(Q)$  là:  $2(x-1) - y + z = 0$  hay  $2x - y + z - 2 = 0$ .

Phương trình của  $(B'D')$  là:  $x = 1 - t, y = t, z = 1$ .

Phương trình của  $(BC')$  là:  $x = 1, y = t, z = t$ .

$I$  là giao điểm của đường thẳng  $B'D'$  và  $(Q)$ , để tìm tọa độ của  $I$  ta thế phương trình đường thẳng  $B'D'$  vào phương trình của  $(Q)$ .

Ta có  $2(1-t) - t + 1 - 2 = 0$ , hay  $t = \frac{1}{3}$ . Từ đó suy ra  $I(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1)$ .

Tương tự, ta tìm được  $J(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ .

5. a)  $\overrightarrow{SB} = (1; 2; -2)$ . Phương trình  $(P): x + 2y - 2z = 0$ .

b) Phương trình đường thẳng  $SB: x = t, y = 2t, z = 2 - 2t$ . Để tìm  $B'$  ta giải hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x = t, y = 2t, z = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow B' \left( \frac{4}{9}; \frac{8}{9}; \frac{10}{9} \right).$$

Tương tự,  $C'(0; 1; 1)$ .

c)  $\overrightarrow{C'B'} = \left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{9}\right)$  vuông góc với  $\overrightarrow{AC'} = (0; 1; 1)$ .

Khi đó  $S_{AB'C'} = \frac{1}{2} AC' \cdot C'B' = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{16+1+1}{81}} = \frac{1}{3}$ .

Mặt khác  $SB' = \sqrt{SA^2 - AB'^2} = \sqrt{4 - \frac{20}{9}} = \frac{4}{3}$  (h.6).

Vậy  $V_{SAB'C'} = \frac{4}{27}$ .

d) Đường thẳng qua  $B$  và vuông góc với  $(P)$  có phương trình :

$$x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = -2t.$$

Để tìm giao điểm  $B_0$  của đường thẳng này với  $(P)$  ta giải hệ

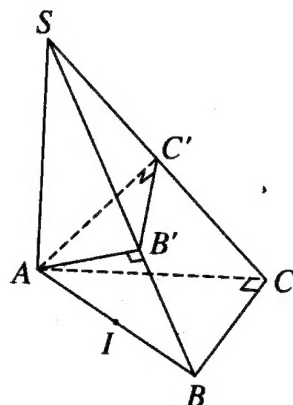
$$\begin{cases} x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = -2t \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow B_0 \left(\frac{4}{9}; \frac{8}{9}; \frac{10}{9}\right).$$

Từ đó suy ra điểm đối xứng với  $B$  qua  $(P)$  là  $B_1 \left(-\frac{1}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{20}{9}\right)$ .

e) Dễ thấy  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC'} \perp \overrightarrow{AC'}$ ,  $\overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{AB'}$  nên  $A, B, C, B', C'$  cùng thuộc mặt cầu tâm  $I \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$  là trung điểm của  $AB$ , bán kính  $IA = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Phương trình mặt cầu đó là  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{5}{4}$ .

Vì điểm  $C'$  thuộc mặt cầu, nên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại  $C'$  phải vuông góc với  $\overrightarrow{IC'} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ . Phương trình của mặt phẳng đó là  $x - 2(z - 1) = 0$  hay  $x - 2z + 2 = 0$ .



Hình 6

## ĐÁP ÁN

6. (C)      8. (B)      10. (B)      12. (C)      14. (D)

7. (D)      9. (D)      11. (A)      13. (A)      15. (C).

# MỤC LỤC

|   | Trang |
|---|-------|
| Lời nói đầu                                 | 3     |
| <b>CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN</b>               |       |
| §1. Khái niệm về khối đa diện               | 5     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                    | 5     |
| B. Các dạng toán cơ bản                     | 7     |
| C. Câu hỏi và bài tập                       | 9     |
| §2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều    | 10    |
| A. Các kiến thức cần nhớ                    | 10    |
| B. Các dạng toán cơ bản                     | 11    |
| C. Câu hỏi và bài tập                       | 13    |
| §3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện  | 14    |
| A. Các kiến thức cần nhớ                    | 14    |
| B. Các dạng toán cơ bản                     | 14    |
| C. Câu hỏi và bài tập                       | 18    |
| Bài tập ôn tập chương I                     | 19    |
| Câu hỏi trắc nghiệm                         | 20    |
| Hướng dẫn giải và đáp số                    | 22    |
| <b>CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU</b> |       |
| §1. Khái niệm về mặt tròn xoay              | 31    |
| A. Các kiến thức cần nhớ                    | 31    |
| B. Các dạng toán cơ bản                     | 34    |
| C. Câu hỏi và bài tập                       | 39    |
| §2. Mặt cầu                                 | 41    |
| A. Các kiến thức cần nhớ                    | 41    |
| B. Các dạng toán cơ bản                     | 43    |
| C. Câu hỏi và bài tập                       | 52    |
| Bài tập ôn tập chương II                    | 54    |
| Câu hỏi trắc nghiệm                         | 56    |
| Hướng dẫn giải và đáp số                    | 58    |

### CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| §1. Hệ toạ độ trong không gian | 76  |
| A. Các kiến thức cần nhớ       | 76  |
| B. Các dạng toán cơ bản        | 78  |
| C. Câu hỏi và bài tập          | 87  |
| §2. Phương trình mặt phẳng     | 89  |
| A. Các kiến thức cần nhớ       | 89  |
| B. Các dạng toán cơ bản        | 91  |
| C. Câu hỏi và bài tập          | 97  |
| §3. Phương trình đường thẳng   | 99  |
| A. Các kiến thức cần nhớ       | 99  |
| B. Các dạng toán cơ bản        | 101 |
| C. Câu hỏi và bài tập          | 112 |
| Bài tập ôn tập chương III      | 115 |
| Câu hỏi trắc nghiệm            | 118 |
| Hướng dẫn giải và đáp số       | 122 |
| Bài tập ôn cuối năm            | 143 |